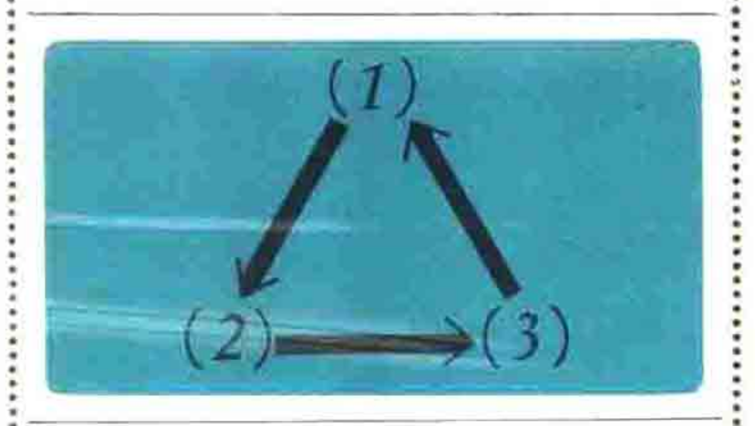
Lecciones populares de matemáticas

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

L. A. Skorniakov



Editorial MIR  Moscú

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Л. А. СКОРНЯКОВ

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

L. A. SKORNIAKOV

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES



EDITORIAL MIR
MOSCÚ

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Traducido del ruso
por Iónij I. A.

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica, manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas, literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia-ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, И-110, GSP, URSS.

IMPRESO EN LA URSS

На испанском языке

ISBN 5-03-003478-5

INDICE

Prefacio 6
§ 1. Sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones . 7
§ 2. Matrices y sus transformaciones elementales . . . 12
§ 3. Método de solución de los sistemas de ecuaciones lineales 24
§ 4. Rango de una matriz 34
§ 5. Teorema de las incógnitas principales 43
§ 6. Sistemas fundamentales de soluciones 53
Respuestas 71
Soluciones 75
Indice alfabético de materias 80

PREFACIO

El contenido del presente libro es la exposición exhaustiva de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales que se apoya solamente en las transformaciones elementales de las matrices. Añadamos sólo que formalmente en ésta no se utiliza el método de la inducción matemática completa. Sin embargo, en algunos casos éste se sobreentiende en la palabra «etcétera». El lector, que conoce este método, sin dificultad alguna conducirá la exposición hasta el nivel actual de rigurosidad. El objetivo fundamental de los ejercicios que se ofrecen es prestar al lector la posibilidad de comprobar el grado de aprendizaje del material que él estudia. Para el conocimiento más profundo de la asignatura sirve cualquier curso del álgebra lineal. Se sobreentiende que al autor le parece mejor su manual de estudio «Elementos del álgebra» (Moscú, Editorial «Naúka», 1980), pero, esto es, naturalmente, una opinión subjetiva.

La idea sobre la que se basa el libro propuesto se empleó durante la enseñanza en la sección de la lingüística estructural de la facultad filológica de la Universidad Estatal de Moscú M. V. Lomonósov.

El autor

§ 1.
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y SUS SOLUCIONES

Llámase *ecuación lineal* de n incógnitas la ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \qquad (1.1)$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ son los números reales dados. Por ejemplo,

$$2x_1 + x_2 = 3, \qquad (1.2)$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0 \qquad (1.3)$$

y

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40 \qquad (1.4)$$

son las ecuaciones de dos, tres y cuatro incógnitas, respectivamente. Los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman *coeficientes* de la ecuación (1.1), mientras que el número b, su *término independiente*. ¿Qué es la solución de la ecuación lineal? Para responder a esta pregunta introduzcamos en el examinado una fila de longitud n *)

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \qquad (1.5)$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son números reales. Subrayemos que la noción de fila es indeterminada. Es lógico, que se puede decir que la fila es una sucesión compuesta de n números reales. Pero, en este caso es conveniente preguntar: ¿qué es una sucesión? La fila (1.5) se denomina *solución* de la ecuación (1.1), si

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n = b.$$

Así, como solución de la ecuación (1.2) sirven las filas (1, 1), (0, 3), (2, —1). Pueden ser indicadas, también, otras soluciones. Entre las soluciones de la ecuación (1.3) llamemos las filas (1, 1, 2), (1, 0, 1), (0, 0, 0) y entre las soluciones de la ecuación (1.4), las filas (10, 10, 10, 10), (40, 0, 0, 0), (70, —10, —10, —10). Para la ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$$

*) Con mucha frecuencia en lugar de «fila» se dice «vector»

como solución sirve cualquier fila de longitud n, mientras que la ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 1$$

en general no tiene solución. Por lo tanto, la ecuación lineal puede poseer gran cantidad de soluciones. Solucionar tal ecuación significa describir de cualquier procedimiento este conjunto de soluciones. Para la ecuación (1.2) puede ser propuesta la siguiente descripción: como soluciones de la ecuación (1.2) sirve todo género de filas tipo $(\alpha, 3 - 2\alpha)$, donde α es un número real arbitrario. El conjunto de soluciones de la ecuación (1.3) consta de todas las filas tipo $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$, donde α y β son números reales arbitrarios. Como soluciones de la ecuación (1.1) para $a_1 \neq 0$ sirven las filas

$$\left(\frac{b - a_2\alpha_2 - \ldots - a_n\alpha_n}{a_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\right),$$

donde $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son números reales arbitrarios. Semejante descripción puede ser obtenida también en el caso cuando se distingue de cero cualquier otro coeficiente de esta ecuación. Por lo contrario, si todos los coeficientes son iguales a cero, entonces para $b = 0$ como solución sirve cualquier fila de longitud n y para $b \neq 0$ no hay soluciones.

En calidad de problema que se soluciona con ayuda de la ecuación (1.4) examinemos el siguiente. En la piscina de 40 m^3 están tendidos 4 tubos. ¿Qué cantidad de agua debe trasegar por cada uno de éstos, para llenar la piscina? Las soluciones de la ecuación (1.4) aducidas antes pueden ser interpretadas así: la primera —por cada tubo se debe echar 10 m^3, la segunda— echar por el primer tubo 40 m^3 y no usar los demás tubos, la tercera— echar por el primer tubo 70 m^3 y por cada uno de los demás tubos vaciar 10 m^3. No es difícil de entender que por cualesquiera tres tubos se puede echar o vaciar una cantidad arbitraria de agua. Sin embargo, si esto está hecho, la cantidad de agua vaciada o echada por el cuarto tubo, se determina unívocamente.

Compliquemos el problema recién examinado de la piscina, requiriendo que la cantidad de agua suministrada por el tercer tubo coincida con la cantidad de agua sumi-

nistrada por todos los demás tubos tomados conjuntamente. Entonces los volúmenes de agua que se trasiega por cada uno de los tubos deben a la par con la ecuación (1.4) satisfacer la ecuación

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

En este caso se dice que la fila buscada debe satisfacer el sistema de dos ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 40, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{aligned} \qquad (1.6)$$

Al sustraer de la primera ecuación la segunda, obtenemos $2x_3 = 40$, de donde $x_3 = 20$. Por consiguiente, en cualquier caso por el tercer tubo deben ser echados 20 m^3 de agua. Pero, el funcionamiento de los tubos restantes se determina mediante la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_4 = 20,$$

de la cual se ve que el régimen de funcionamiento de cualesquiera dos tubos restantes puede ser prefijado arbitrariamente. Pero, si éste está prefijado, el volumen de agua que pasa por el último tubo se determina unívocamente.

En el caso general tropezamos con el sistema m de ecuaciones de n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

La fila $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ se llama *solución* de este sistema, si ella es la solución de cada una de las ecuaciones que entran en ésta. En particular, al conjunto de soluciones del sistema (1.6) pertenecen las filas (5, 5, 20, 10), (—15, 10, 20, 25) y otras.

Prestemos atención al sistema de designaciones adoptado en la anotación del sistema (1.7). Por ejemplo, los índices del coeficiente a_{12} indican que hemos de tratar con el segundo coeficiente de la primera ecuación. Por esta razón se debe decir «*a* uno dos» y no «*a* doce».

Ya en el ejemplo del sistema (1.6) fue visto que las incógnitas están lejos de ser equivalentes. El valor de unas puede determinarse mediante el sistema de ecuaciones lineales, las otras pueden prefijarse arbitrariamente, las terceras se determinan unívocamente, cuando la selección de los valores de las incógnitas prefijadas de modo arbitrario ya está realizada. El objetivo del presente libro es enseñar al lector cómo se realiza el análisis correspondiente.

Dos sistemas de ecuaciones lineales se denominan *equivalentes*, si cualquier solución del primer sistema es la solución del segundo y viceversa. Está claro, que en lugar del sistema dado puede ser resuelto cualquier sistema equivalente a éste.

Por ejemplo, el sistema (1.6) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 40, \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + 0x_4 &= 20. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

En efecto, si $\bar{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ es la solución del sistema (1.6), esta fila sirve como solución de la primera ecuación de este sistema y, vale decir, también, de la primera ecuación del sistema (1.8). Además, como ya se había señalado antes, debe ser $\alpha_3 = 20$ y, por consiguiente, la fila $\bar{u}$ es también la solución de la segunda ecuación del sistema (1.8). Por lo tanto, cualquier solución del sistema (1.6) sirve como solución del sistema (1.8). Al contrario, admitamos que $\bar{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$ es la solución del sistema (1.8). Como antes, enseguida vemos que $\bar{v}$ es la solución de la primera ecuación del sistema (1.6). Además, $\beta_3 = 20$ y $\beta_1 + \beta_2 + 20 + \beta_4 = 40$. De aquí $\beta_1 + \beta_2 + \beta_4 = 20$ y, por consiguiente, $\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 = \beta_1 + \beta_2 - 20 + \beta_4 = 40 - 20 = 20$. En consecuencia, $\bar{v}$ sirve como solución de la segunda ecuación del sistema (1.6) y, vale decir, también, solución de todo este sistema.

Teorema 1.1. *Si al sistema de ecuaciones lineales de n incógnitas se agrega la ecuación*

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0,$$

entonces surge un sistema equivalente al inicial.

Demostración. En vista de que cada ecuación del sistema viejo es la ecuación del nuevo, cada solución del nuevo sistema sirve como solución del viejo. No obstante, si la fila $\bar{u}$ es la solución del sistema viejo, ésta es, sin duda, la solución de todas las ecuaciones del nuevo sistema salvo, puede ser, de la agregada. Pero, $\bar{u}$ sirve como solución también de esta ecuación, puesto que, como ya se había señalado, en calidad de su solución sirve cualquier fila de longitud n. Así, pues, cualquier solución del sistema viejo es la solución del nuevo, con lo que se concluye la demostración.

EJERCICIOS

1. Componer sistemas de ecuaciones lineales para solucionar los siguientes problemas:

a) ¿Cuáles son los lados de un cuadrilátero, si la suma de las longitudes de éstos es igual a 40 m, mientras que la suma de las longitudes de los tres primeros lados es 20 m mayor que la longitud del cuarto lado?

b) ¿Con qué procedimientos se puede pagar 2 rublos con 20 monedas de 5, 10, 15 y 20 kopeks de valor de cada una?

c) ¿Cuáles pueden ser los cuatro números, la suma de cualesquiera tres de éstos es igual a 1?

d) ¿Cuáles pueden ser los cuatro números, la suma de cualesquiera dos de éstos es igual a 1?

e) En una obra de construcción hay cuatro hormigoneras de rendimiento cada una de 20, 12, 15 y 10 toneladas de hormigón por hora. Se requiere diariamente durante tres días producir 120 toneladas observando las siguientes condiciones: 1) la hormigonera de menor rendimiento trabaja diariamente, mientras que cada una de las restantes, dos días; 2) simultáneamente están trabajando tres hormigoneras; 3) el número de horas de trabajo de cada hormigonera es el mismo para todos los días de trabajo. ¿Cuántas horas debe trabajar cada una de las hormigoneras?

f) ¿Cuál puede ser la sucesión de n números, si la suma de dos términos vecinos de esta sucesión equivale a cero y lo mismo es justo para los términos primero y último?

2. Si al sistema (1.7) añadir la ecuación

$$(a_{11}+a_{21})\,x_1+(a_{12}+a_{22})\,x_2+\ldots$$
$$\ldots+(a_{1n}+a_{2n})\,x_n=b_1+b_2,$$

se obtendrá un sistema equivalente al inicial. Demostrarlo.

§ 2.
MATRICES Y SUS TRANSFORMACIONES ELEMENTALES

El aparato que permite resolver el problema planteado en el párrafo precedente son las matrices que surgen, como veremos, de las filas de longitud n. Cabe recordar, que la noción de la fila de longitud n de números reales es indeterminada. Si está dada la fila $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, entonces los números a_i se llaman sus *coordenadas* o *componentes*. Las filas $(a_1, \ldots, a_m)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ se consideran *iguales*, si $m = n$ y $a_i = b_i$ para todos los i. La fila que consta sólo de ceros se llama *nula* y se designa por $\overline{0}$. Llámase *líder* de la fila su primera coordenada no nula. Por ejemplo, los líderes de las filas (0, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1) y (0, 0, 0, 0, 1) se disponen en los lugares segundo, primero y quinto, repectivamente. Se comprende, que la fila nula no tiene líder. Se puede adicionar dos filas de la misma longitud. La *suma* de dos filas se determina por medio de la siguiente regla:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

Subrayemos que el símbolo + en los miembros primero y segundo de esta igualdad tiene distinto sentido. En el primero éste designa la suma de las filas y en el segundo, la suma de los números reales. Por ejemplo,

$$(1, 2, 3, -1) + (2, 1, 0, 1) = (3, 3, 3, 0).$$

Si $\bar{a}$ es una fila arbitraria de longitud n y $\overline{0}$, la fila nula de longitud n, entonces, como es fácil de calcular,

$$\bar{a} + \overline{0} = \bar{a} \quad \text{y} \quad \overline{0} + \bar{a} = \bar{a}.$$

Teorema 2.1. *Si $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{c}$ son filas arbitrarias de longitud n, entonces*

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$$

y

$$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}).$$

Demostración. Sea que

$$\overline{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

y

$$\overline{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n).$$

Entonces

$$\overline{a} + \overline{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$

y

$$\overline{b} + \overline{a} = (\beta_1 + \alpha_1, \ldots, \beta_n + \alpha_n).$$

Puesto que para adicionar los números reales la ley conmutativa es justa, entonces

$$\alpha_1 + \beta_1 = \beta_1 + \alpha_1, \ \alpha_2 + \beta_2 = \beta_2 + \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_n + \beta_n = \beta_n + \alpha_n.$$

Así, pues, las filas $\overline{a} + \overline{b}$ y $\overline{b} + \overline{a}$ tienen la misma longitud y para cada i la misma i-ésima coordenada. Según la definición de la igualdad de las filas $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$, es lo que se debía demostrar.

Para la demostración de la segunda igualdad pongamos $\overline{c} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ y observemos, que como i-ésimas coordenadas de las filas, que se encuentran en los miembros primero y segundo de nuestra igualdad, sirven los números $(\alpha_i + \beta_i) + \gamma_i$ y $\alpha_i + (\beta_i + \gamma_i)$. Tomando en consideración la justeza de la ley asociativa para los números reales, como anteriormente, llegamos a la igualdad necesaria.

Advirtamos, que no todas las operaciones que se encuentran en las matemáticas son conmutativas. Examinemos, por ejemplo, el conjunto de palabras anotadas con ayuda de las letras del alfabeto latino. Con ello, por palabra comprenderemos cualquier sucesión finita de estas letras: por ejemplo, las palabras *prk*, *mamá* y *naotum*. Determinemos la operación de adición mediante la siguiente regla:

$$x_1 \ldots x_m + y_1 \ldots y_n = x_1 \ldots x_m y_1 \ldots y_n$$

(aquí tanto x_i, como también y_i no son diversas letras, obligatoriamente). Está claro que, por ejemplo, $m + (amá) = mamá \neq$ $\neq amám = (amá) + m$. Por consiguiente, existen tales palabras u y v, que $u + v \neq v + u$. Sin embargo, se puede demostrar que

la igualdad $(u + v) + w = u + (v + w)$ es justa para cualesquiera palabras u, v y w (¡intenten!). Otro ejemplo de la operación no conmutativa es la de elevación a potencia en el conjunto de números reales, puesto que $2^3 \neq 3^2$.

Gracias al teorema 2.1, adicionando las filas podemos actuar así mismo, como hemos acostumbrado a hacerlo durante la adición de los números, es decir, no prestar atención al orden de los sumandos, y al haber varios sumandos poner el paréntesis de modo arbitrario. Subrayemos que tanto para los números, como para las filas la inscripción

$$\overline{a}_1 + \overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_m,$$

hablando en rigor, no tiene sentido, ya que podemos calcular solamente la suma de dos números o filas. Pero, calculando la suma «larga», pondremos, de modo imaginario de una u otra manera, el paréntesis. Más detalladamente véase el manual de estudio «Elementos del álgebra», pág. 36.

Además de la adición necesitaremos multiplicar la fila por el número real λ. Esta operación se determina mediante la siguiente regla:

$$\lambda (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n).$$

Teorema 2.2. *Si $\overline{a}$ y $\overline{b}$ son filas de longitud n, mientras que λ es un número real, entonces*

$$\lambda (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b},$$
$$(\lambda + \mu) \overline{a} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{a},$$
$$(\lambda\mu) \overline{a} = \lambda (\mu\overline{a})$$

y

$$1\overline{a} = \overline{a}.$$

Demostración. Por ejemplo, para demostrar la igualdad $\lambda (\overline{a} + \overline{b}) = \lambda\overline{a} + \lambda\overline{b}$, observemos, que i-ésimas coordenadas de las filas, que se encuentran en los miembros primero y segundo de esta igualdad son $\lambda (a_i + b_i)$ y $\lambda a_i + \lambda b_i$, respectivamente, y su coincidencia se desprende de la justeza de la ley distributiva para los números reales.

La justeza de las igualdades restantes se establece mediante razonamientos análogos, los cuales, espero, que el lector podrá realizar independientemente.

La tabla que representa de por sí varias filas de longitud n anotadas una debajo de la otra se denomina *matriz*. La matriz

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

contiene m filas y n columnas. Diremos también que ésta tiene *dimensión* $m \times n$. Por ejemplo, las tablas

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ y}$$

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

son las matrices de dimensiones 3×4, 4×3 y 2×5, respectivamente. La fila de longitud n es la matriz de dimensión $1 \times n$, mientras que la columna de longitud m puede ser examinada como matriz de dimensión $m \times 1$. La matriz de dimensión $n \times n$ llámase *matriz cuadrada de orden* n. La matriz O que consta de las filas nulas se llama *nula*, mientras que la matriz

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

unitaria. Subrayemos, que para cada número n existe su matriz unitaria de orden n y para cada dimensión $m \times n$, su matriz nula. Dos matrices se consideran *iguales*, si éstas tienen dimensiones idénticas y sus elementos situados en sus lugares correspondientes coinciden.

A continuación los elementos de la matriz designada mediante cierta letra mayúscula (por ejemplo, A) denominaremos, como regla, sin aclaraciones especiales, con la

correspondiente letra minúscula con índices (en nuestro caso a_{ij}), que designan el número de la fila y de la columna, respectivamente.

Por transformación de la matriz se entiende el paso de una matriz a la otra, realizado según las reglas determinadas. Examinaremos las siguientes transformaciones:

I. Las dos filas de la matriz cambian sus lugares.

II. A cualquier fila de la matriz se adiciona su otra fila multiplicada por cierto número.

Estas transformaciones se denominan *transformaciones elementales de las filas de primero y segundo tipo*, respectivamente. De manera análoga se determinan las *transformaciones elementales de las columnas.*

A veces, resulta muy útil también la transformación del tercer tipo:

III. La multiplicación de cierta fila por un número que se distingue de cero.

Por ejemplo, de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

adicionando a la tercera fila la primera multiplicada por 2, pasemos a la matriz

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{matrix} \right\|$$

y después de adicionar a la segunda fila de esta matriz la primera multiplicada por -2, llegamos a la matriz

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -2 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Teorema 2.3. *Si en la matriz A el elemento a_{ik} difiere de 0 e $i \neq j$, entonces en la matriz B obtenida de A mediante la adición a la j-ésima fila de la i-ésima fila multiplicada por $-\frac{a_{jk}}{a_{ik}}$, el elemento b_{jk} es igual a 0.*

Demostración. De las definiciones de adición de las filas y multiplicación por el número obtengamos (¡no nos interesan las coordenadas no inscritas de las filas a examinar!)

$$(b_{j1}, \ldots, b_{jk}, \ldots, b_{jn}) = (a_{j1}, \ldots, a_{jk}, \ldots, a_{jn}) +$$
$$= \left(-\frac{a_{jk}}{a_{ik}}\right)(a_{i1}, \ldots, a_{ik}, \ldots, a_{in}) = (\ldots, a_{jk}, \ldots) +$$
$$+ \left(\ldots, -\frac{a_{jk}}{a_{ik}} a_{ik}, \ldots\right) = (\ldots, a_{jk}, \ldots) +$$
$$+ (\ldots, -a_{jk}, \ldots) = (\ldots, 0, \ldots).$$

En virtud de la definición de la igualdad de las filas de aquí se desprende que $b_{jk} = 0$.

Teorema 2.4. *Si de la matriz A a la matriz B se puede pasar mediante un número finito de transformaciones elementales de las filas, entonces de B a A también se puede pasar mediante el número finito de transformaciones elementales de las filas.*

Demostración. Previamente será establecido

Lema. *Si de la matriz A a la matriz B se puede pasar con ayuda de una transformación elemental, entonces de B a A también se puede pasar con ayuda de una transformación elemental.*

En efecto, la justeza del lema es evidente, si para pasar de A a B fue utilizada una transformación elemental del primer tipo. Supongamos, que de A a B habíamos pasado, empleando una sola transformación elemental de segundo tipo, es decir, (i-ésima fila en B) $=$ (i-ésima fila en A) $+ \lambda$ (j-ésima fila en A), mientras que cada una de las filas restantes de la matriz B coincide con la fila correspondiente de la matriz A. Por lo tanto, $b_{ik} = a_{ik} + \lambda a_{jk}$ para cada número k. Si ahora a la i-ésima fila de la matriz B adicionar su j-ésima fila multiplicada por $(-\lambda)$, en la matriz obtenida después de esto en el lugar (i, k) resultará el elemento

$$b_{ik} + (-\lambda)\, b_{jk} = (a_{ik} + \lambda a_{jk}) + (-\lambda a_{jk}) = a_{ik}.$$

En vista de que los elementos de la matriz obtenida, situados en las filas distintas de la i-ésima, coinciden con los elementos correspondientes de la matriz A, toda ésta coincide con A y el lema queda demostrado.

Retornando a la demostración del teorema supongamos que el paso de A a B se ha realizado con empleo de t

transformaciones elementales, donde $t > 1$. Designemos por $C_1, C_2, \ldots, C_{t-1}$ las matrices que surgen consecutivamente con estas transformaciones. Así, pues, con ayuda de una transformación elemental se puede pasar de A a C_1, de C_i a C_{i+1} para $i = 1, 2, \ldots, t-2$ y de C_{t-1} a B. Pero, entonces de acuerdo con el lema se puede con ayuda de una transformación elemental pasar de B a C_{t-1}, de C_{t-1} a C_{t-2}, etc. Al fin y al cabo pasemos a la matriz C_1 y de ésta a A, lo que concluye la demostración del teorema.

Llamemos la matriz *escalonada*, si ésta posee las siguientes propiedades.

(1) Si la i-ésima fila es nula, entonces la $(i+1)$-ésima fila también es nula.

(2) Si los líderes de las filas i-ésima y $(i+1)$-ésima se disponen en las columnas con los números k_i y k_{i+1}, respectivamente, entonces

$$k_i < k_{i+1}.$$

Evidentemente estas propiedades significan que por debajo de la fila nula pueden disponerse solamente las filas nulas, mientras que todos los elementos colocados a la izquierda y hacia abajo del líder de cualquier fila son los ceros. No es difícil de explicar el origen de la denominación examinando, por ejemplo, la matriz escalonada

$$\left\|\begin{array}{c|cc|c|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

donde $k_1 = 2$, $k_2 = 4$ y $k_3 = 5$.

Teorema 2.5. *Si A es una matriz escalonada de dimensión $m \times n$, mientras que B está obtenida de A, agregando a ésta por debajo cierta cantidad de filas nulas de longitud n, entonces B es la matriz escalonada.*

Demostración. Supongamos que la r-ésima fila de la matriz B es nula. Si esta fila es una de las agregadas, entonces todas las filas colocadas por debajo de ésta son nulas según la condición. Sin embargo, si esta r-ésima fila pertenece a la matriz A, entonces de acuerdo con la

definición de la matriz escalonada las filas de la matriz A dispuestas por debajo de la r-ésima resultan nulas. Por debajo de éstas se colocan las filas agregadas, las cuales son nulas según el planteamiento. Por consiguiente, la matriz B satisface el primer requerimiento que entra en la definición de la matriz escalonada. Puesto que todas las filas no nulas de la matriz B son las filas de la matriz A y se disponen en aquel mismo orden, sus líderes satisfacen la segunda condición de la definición de la matriz escalonada. Por lo tanto, la matriz B es escalonada.

El papel decisivo para construir la teoría que nos es necesaria lo juega el siguiente hecho.

Teorema 2.6. *Cualquier matriz mediante un número finito de transformaciones elementales de las filas puede ser convertida en una matriz escalonada.*

Demostración. Sea A la matriz arbitraria y m, el número de sus filas. Si $A = 0$, ésta es escalonada. Si la matriz A no es nula, en ésta hay, por lo menos, un elemento no nulo. El elemento no nulo se dispone en cualquier fila. Vale decir también que en nuestra matriz hay filas no nulas. Seleccionamos aquélla de éstas, en la cual el líder se dispone en la columna con el menor número, digamos, con el número k_1. Al aplicar la transformación del primer tipo, traslademos esta fila en el primer lugar. En este caso la matriz tomará el aspecto

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{2k_1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & b_{mk_1} & \dots \end{Vmatrix},$$

con la particularidad de que $b_{1k_1} \neq 0$. Ahora apliquemos, las transformaciones del segundo tipo: a la segunda fila adicionemos la primera multiplicada por $-\frac{b_{2k_1}}{b_{1k_1}}$, a la tercera fila, la primera multiplicada por $-\frac{b_{3k_1}}{b_{1k_1}}$, etc. Según el teorema 2.4 después de aplicar $m - 1$ de tales transformaciones elementales obtenemos tal matriz que en su k_1-ésima columna todos los elementos, salvo el

primero, equivalen a cero:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{Vmatrix}.$$

La matriz de una fila

$$\| 0 \quad \dots \quad 0 \quad b_{1k_1} \quad \dots \|$$

es escalonada, ya que las condiciones incluidas en la definición de la matriz escalonada se cumplen para ésta de modo trivial: no hay filas nulas y tampoco hay filas con el líder colocado en la k_{i+1}-ésima columna. En vigor del teorema 2.5 la matriz B resulta escalonada y en el caso cuando todas sus filas, comenzando de la segunda, son nulas. Si esto no es así, entonces, al igual que antes, hallemos entre éstas la fila, cuyo líder se encuentra en la columna con el menor número, por ejemplo, con el número k_2. Dado que a la izquierda y por debajo del elemento b_{1k_1} se encuentran solamente ceros, entonces $k_1 < < k_2$. Coloquemos la fila encontrada en el segundo lugar y de nuevo, empleando el teorema 2.4, lleguemos a la matriz

$$C = \begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & b_{1k_1+1} & \dots & b_{1k_2-1} & b_{1k_2} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{2k_2} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{Vmatrix},$$

donde $c_{2k_2} \neq 0$ (está claro, que puede suceder que $k_2 = = k_1 + 1$ y no habrán elementos $b_{1k_1+1}, \dots, b_{1k_2-1}$). Desde luego, las primeras dos filas de la matriz C forman una matriz escalonada. Si $m = 2$ o bien todas las filas de la matriz C, a partir de la tercera son nulas, entonces, como antes, concluimos que C es una matriz escalonada. Si por lo contrario entre estas filas hay filas no nulas, entonces los mismos razonamientos, como antes, permi-

ten venir a la matriz

$$\left\|\begin{matrix} 0 \dots 0 & b_{1k_1} & b_{1k_1+1} & \dots & b_{1k_2-1} & b_{1k_2} & b_{1k_2+1} & \dots & b_{1k_3-1} & b_{1k_3} & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{2k_2} & c_{2k_2+1} & \dots & c_{2k_3-1} & c_{2k_3} & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{2k_3} & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{matrix}\right\|,$$

donde $d_{2k_3} \neq 0$. Otra vez observamos que la matriz dispuesta en las primeras tres filas, es escalonada, y bien nos cercioramos del carácter escalonado de toda la matriz, o bien tenemos la posibilidad de conseguir que en las primeras cuatro filas se disponga la matriz escalonada. Es evidente que a lo más después de m pasos resultará escalonada la matriz que contiene todas las m filas.

La demostración expuesta del teorema 2.6 es efectiva en el sentido de que en ella se contiene el método práctico de reducción de la matriz dada a la forma escalonada. Por ejemplo, tal reducción de la matriz

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{matrix}\right\|$$

se realiza del modo siguiente:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{matrix}\right\|$$

(de las filas segunda, tercera y cuarta se sustrae la primera),

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

(a la tercera fila se añade la segunda, mientras que a la cuarta, la segunda multiplicada por 2).

Para la matriz

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

obtenemos

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$ (se sustituyen por sus lugares la primera y la tercera filas),

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$ (de la segunda fila se sustrae la primera),

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$ (a la tercera fila se añade la segunda),

mientras que para la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{Vmatrix}$$

tendremos

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \end{Vmatrix}$$ (de las filas segunda y tercera sustraemos la primera)

y

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$$ (a la tercera fila se añade la segunda multiplicada por (-3)).

EJERCICIOS

1. Sea que los líderes de las filas $\bar{a}$, $\bar{b}$ y $\bar{a} + \bar{b}$ se encuentran en las columnas con los números k, l y m, respectivamente, con la particularidad de que $k \leqslant l$. Demostrar que $k \leqslant m$. Ofrecer los ejemplos de las filas, para las cuales $k < m$. Demostrar que esto es posible solamente cuando $k = l$.

2. Sea que $\bar{a} = (1, 2, -3, 0, 1)$ y $\bar{b} = (1, -1, 0, 2, 3)$. Hallar la fila $\bar{x}$, para la cual $\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$.

3. Demostrar que la ecuación $\bar{a} + \bar{x} = \bar{0}$ es resoluble para cualquier fila $\bar{a}$.

4. Demostrar que $0\bar{a} = \bar{0} = \lambda\bar{0}$ y $(-1)\,\bar{a} + \bar{a} = \bar{0}$ para cualquier fila $\bar{a}$ y para cualquier número real λ.

5. Supongamos que $\bar{a} = (5, -8, -1, 2)$, $\bar{b} = (2, -1, 4, -3)$ y $\bar{c} = (-3, 2, -5, 4)$. Hallar las filas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ que satisfacen las ecuaciones

$$\bar{a} + 2\bar{b} + 3\bar{c} + 4\bar{x} = 0$$

y

$$3\,(\bar{a} - \bar{y}) + 2\,(\bar{a} + \bar{y}) = 5\,(\bar{c} + \bar{y}).$$

6. Se dice que la fila $\bar{a}$ es la *combinación lineal* de las filas $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_m$, si $\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1 + \ldots + \lambda_m\bar{a}_m$, para ciertos números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

a) Hallar la combinación lineal $3\bar{a} + 5\bar{b} - \bar{c}$, donde $\bar{a} = (4, 1, 3, -2)$, $\bar{b} = (1, 2, -3, 2)$ y $\bar{c} = (16, 9, 1, -3)$.

b) Si la fila es la combinación lineal de las filas $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_s$, mientras que cada una de estas filas, la combinación lineal de las filas $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r$, entonces la fila $\bar{c}$ es la combinación lineal de las filas $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r$. Demostrar.

7. Reducir a la forma escalonada:

a) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 40 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 20 \end{Vmatrix}$; b) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 200 \end{Vmatrix}$;

c) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$; d) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$;

e) $\begin{Vmatrix} 20 & 12 & 0 & 10 & 120 \\ 20 & 0 & 15 & 10 & 120 \\ 0 & 12 & 15 & 10 & 120 \end{Vmatrix}$;

f) $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

(la matriz de dimensión $n \times n$).

8. Demostrar que la sustitución por sus lugares de las filas i-ésima y j-ésima puede ser realizada con ayuda de la siguiente sucesión de transformaciones elementales: 1) adición a la fila i-ésima de la fila j-ésima multiplicada por (—1); 2) adición a la fila j-ésima de la fila i-ésima; 3) adición a la fila i-ésima de la fila j-ésima multiplicada por (—1); 4) multiplicación de la fila i-ésima por (—1)

9. Demostrar que mediante las transformaciones elementales de las filas y columnas cualquier matriz puede ser reducida a la forma diagonal (la matriz D se denomina *diagonal*, si $d_{ij} = 0$ para $i \neq j$). Aducir el ejemplo que muestra que existen las matrices, las cuales es imposible reducir a la forma diagonal mediante las transformaciones elementales de las filas.

10. Demostrar la analogía del teorema 2.4 para las transformaciones elementales del tipo III y la analogía de los teoremas 2.4 y 2.6, para las transformaciones elementales de las columnas.

11. Demostrar que, realizando con la matriz no nula

$$A = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}$$

las transformaciones elementales del tipo II con las filas y columnas, la matriz A puede ser reducida a la forma

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -ab \end{Vmatrix}.$$

12. Supongamos que la matriz B fue obtenida de la matriz A con ayuda de un número finito de transformaciones elementales de las filas de los tipos I, II y III. Demostrar que cada una de las filas de la matriz B es la combinación lineal de las filas de la matriz A. *Indicación*: utilizar el ejercicio 6, b).

13. (A. N. Mirónov). Sean B y C las matrices escalonadas obtenidas de la matriz A mediante un número finito de transformaciones elementales de las filas de los tipos I, II y III. Demostrar que los líderes de las filas de las matrices B y C se encuentran en las mismas columnas. *Indicación*: aplicar el ejercicio 12.

§ 3.
MÉTODO DE SOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \qquad (3.1)$$

se determina uniformemente mediante la matriz

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right\|,$$

que se llama *matriz ampliada del sistema*. La matriz que se encuentra a la izquierda de la raya vertical se denomina *matriz del sistema*. Por ejemplo, como matrices ampliadas de los sistemas

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 4; \end{aligned} \qquad (3.2)$$

$$\begin{aligned} -x_3 + x_4 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \\ x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

y

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6, \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 14 \end{aligned} \qquad (3.4)$$

sirven las matrices

$$\left\|\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\|$$

y

$$\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right\|,$$

respectivamente.

En adelante, hablando respecto de las filas del sistema de ecuaciones lineales, tendremos en cuenta las filas de la correspondiente matriz ampliada.

Teorema 3.1. *Si multiplicamos cierta fila del sistema de ecuaciones lineales por un número diferente de cero,*

surge un sistema de ecuaciones lineales equivalente al inicial.

Demostración. Supongamos que la i-ésima fila del sistema (3.1) se multiplica por el número λ diferente de cero. La correspondiente ecuación toma el aspecto

$$(\lambda a_{i1}) x_1 + (\lambda a_{i2}) x_2 + \ldots + (\lambda a_{in}) x_n = \lambda b_i. \qquad (3.5)$$

Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es la solución del sistema (3.1), entonces, sustituyéndola en el primer miembro de la ecuación (3.5), obtenemos

$$(\lambda a_{i1}) \alpha_1 + (\alpha a_{i2}) \alpha_2 + \ldots + (\lambda a_{in}) \alpha_n = \\ = \lambda (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n) = \lambda b_i.$$

Por consiguiente, la fila $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es la solución de la ecuación (3.5). Puesto que las demás ecuaciones del nuevo sistema son las mismas que del viejo, esta fila es la solución del nuevo sistema. Ahora supongamos que la fila $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sirve como solución del nuevo sistema. Entonces esta fila sirve como solución para todas las ecuaciones del sistema (3.1), menos, puede ser, la i-ésima. Al sustituir esta solución en la ecuación (3.5) y sacando λ del paréntesis obtenemos

$$\lambda (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n) = \lambda b_i.$$

Dado que $\lambda \neq 0$, de aquí se desprende

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \ldots + a_{in}\alpha_n = b_i,$$

es decir, la fila $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ resulta la solución de la i-ésima ecuación del sistema (3.1) y, vale decir también, solución del todo este sistema.

Teorema 3.2. *Si de la matriz $\widetilde{A}$ a la matriz $\widetilde{B}$ se puede pasar mediante un número finito de transformaciones elementales de las filas, entonces son equivalentes los correspondientes sistemas de ecuaciones lineales.*

Demostremos previamente el siguiente lema.

Lema. *Si de la matriz $\widetilde{A}$ a la matriz $\widetilde{B}$ se puede pasar mediante un número finito de transformaciones elementales de las filas, cualquier solución del sistema, correspondiente a la matriz $\widetilde{A}$, sirve como solución del sistema que corresponde a la matriz $\widetilde{B}$.*

Para la demostración, inicialmente, supongamos que el paso de $\tilde{A}$ a $\tilde{B}$ está realizado con ayuda de una transformación elemental. Si, con ello, se aplica la transformación elemental del primer tipo, es decir, están conmutadas de sus lugares las filas, entonces nuestras ecuaciones solamente se cambian de sus lugares. Ciertamente, las viejas soluciones las satisfarán, como antes. Con las transformaciones elementales del segundo tipo a la i-ésima fila añadimos la j-ésima fila multiplicada por λ. Por consiguiente, la i-ésima fila de la matriz $\tilde{B}$ tiene aspecto

$$(a_{i1} + \lambda a_{j1}, \ldots, a_{in} + \lambda a_{jn} \mid b_i + \lambda b_j).$$

Sea que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ es la solución del sistema con la matriz $\tilde{A}$, es decir, la solución de cada una de sus ecuaciones. ¿Si será ésta la solución del sistema con la matriz $\tilde{B}$? La duda puede ser provocada solamente por la i-ésima ecuación de este sistema. Pero

$$\begin{aligned}(a_{i1} + \lambda a_{j1})\,\alpha_1 + \ldots + (a_{in} + \lambda a_{jn})\,\alpha_n &= \\ = (a_{i1}\alpha_1 + \ldots + a_{in}\alpha_n) &+ \\ + \lambda\,(a_{j1}\alpha_1 + \ldots + a_{jn}\alpha_n) &= b_i + \lambda b_j.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para el caso particular que se examina el lema está demostrado. En el caso general tenemos sucesión $\tilde{A}, \tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_k, \tilde{B}$, donde se puede pasar de la matriz izquierda a la derecha utilizando sólo una transformación elemental. Por esta razón, cualquier solución del sistema con la matriz ampliada $\tilde{A}$ sirve de solución del sistema con la matriz ampliada $\tilde{C}_1$. Pero, entonces, éste sirve de solución del sistema con la matriz ampliada $\tilde{C}_2$. Continuando de tal manera nos cercioraremos de que esta solución es también la solución del sistema con la matriz ampliada $\tilde{B}$.

Pasando a la demostración del teorema advertiremos que de acuerdo con el lema cada solución del sistema, que corresponde a la matriz $\tilde{A}$, sirve de solución del sistema, que corresponde a la matriz $\tilde{B}$. Por otro lado,

en vigor del teorema 2.4, se puede pasar de la matriz $\tilde{B}$ a la matriz $\tilde{A}$ con ayuda de las transformaciones elementales. Por consiguiente, empleando el lema una vez más, veremos que cada solución del sistema con la matriz ampliada $\tilde{B}$ sirve de solución del sistema con la matriz ampliada $\tilde{A}$. Así, pues, estos sistemas son equivalentes.

Ahora está claro que para hallar la solución de cualquier sistema de ecuaciones lineales es suficiente saber encontrar las soluciones del sistema escalonado, ya que cualquier matriz puede ser reducida a la forma escalonada y una vez realizadas las transformaciones elementales se obtiene el sistema equivalente de transformaciones.

Por ejemplo, al notar que en la conclusión del segundo párrafo a la forma escalonada fueron reducidas las matrices ampliadas de los sistemas (3.2) . . . (3.4) concluimos que en lugar de éstos se puede solucionar los sistemas

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(las dos últimas ecuaciones están rechazadas a base del teorema 1.1),

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 \qquad &= 0, \\ x_3 - x_4 &= 0, \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3, \\ x_2 + 2x_3 &= 3, \\ 2x_3 &= 2, \end{aligned}$$

respectivamente.

Procedemos el análisis del sistema escalonado de ecuaciones lineales.

Supongamos dada la matriz escalonada que corresponde al sistema m de ecuaciones lineales con n incógnitas. Son posibles dos siguientes casos:

I. Existe una fila, cuyo líder se encuentra en la última columna.

II. No existe tal fila.

En el primer caso el sistema de ecuaciones correspondiente contiene la ecuación del aspecto $0x_1 + \ldots + 0x_n = b$, donde $b \neq 0$. Está claro que ningún juego de los valores de x_i puede satisfacer esta ecuación y más aún todas las ecuaciones del sistema. Vale decir también, que el sistema de ecuaciones no tiene soluciones.

Para analizar el segundo caso supongamos que la matriz escalonada a examinar contiene r filas no nulas y que los primeros elementos no nulos de estas filas se disponen en las columnas con los números $k_1, \ldots, k_r$. Según la definición de la matriz escalonada

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqslant n.$$

Llamemos *principales* las incógnitas $x_{k_1}, \ldots, x_{k_r}$, y todas las demás (si las hay), *libres*. Además, rechacemos las ecuaciones que corresponden a las filas nulas, lo que, en vigor del teorema 1.1, llevará a un sistema equivalente al inicial.

Supongamos, primeramente, que no hay incógnitas libres. Entonces

$$r = n, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \; \ldots, \; k_n = n$$

y el sistema que se examina tiene el aspecto

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1, \\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n &= b_{n-1}, \\
a_{nn}x_n &= b_n,
\end{aligned}$$

con la particularidad de que $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ se distinguen del cero. Puesto que $a_{nn} \neq 0$, de la última ecuación unívocamente se determina x_n. Después de esto la ecuación penúltima permite determinar uniformemente x_{n-1}, etc. Por lo tanto, en el caso destacado el sistema a examinar tiene solución única.

Ahora supongamos que hay incógnitas libres. En este caso designaremos por L_i la suma de las incognitas libres multiplicadas por los coeficientes de la i-ésima ecuación, que se encuentran delante de éstas, y trasladando las incógnitas libres al segundo miembro llegaremos al

sistema

$$a_{1k_1}x_{k_1}+a_{1k_2}x_{k_2}+\ldots+a_{1k_r}x_{k_r}=b_1-L_1,$$
$$a_{2k_2}x_{k_2}+\ldots+a_{2k_r}x_{k_r}=b_2-L_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{rk_r}x_{k_r}=b_r-L_r,$$

donde los coeficientes $a_{1k_1}, a_{2k_2}, \ldots, a_{rk_r}$ se diferencian de cero. Como antes, podemos determinar sucesivamente $x_{k_r}, x_{k_{r-1}}$, etc., si atribuimos a las incógnitas libres cualesquiera valores determinados. Con ello, las incógnitas principales se determinan unívocamente. Al atribuir a las incógnitas libres los valores de todo género encontraremos todas las soluciones del sistema dado, es decir, lo resolveremos. Puesto que a las incógnitas libres pueden atribuirse diversos valores, el sistema en el caso que se examina tiene más de una solución.

Al analizar mediante el procedimiento descrito los sistemas escalonados aparecidos de los sistemas (3.2) . . . . . . (3.4) concluimos: 1) el sistema (3.3) no tiene soluciones; 2) el sistema (3.4) tiene única solución (1, 1, 1); 3) en el sistema (3.2) las incógnitas x_1 y x_3 son principales, mientras que x_2 y x_4, libres, con la particularidad de que $x_3 = x_4$ y $x_1 = 4 - x_2 - 2x_4$. Lo último se puede tratar así: cualquier solución del sistema (3.2) tiene aspecto

$$(4-\alpha-2\beta,\ \alpha,\ \beta,\ \beta),$$

donde α y β son los números reales arbitrarios.

El sistema de ecuaciones lineales se llama *homogéneo*, si todos sus segundos miembros son iguales a cero. El sistema homogéneo siempre tiene solución, por ejemplo, la fila nula. Por esta razón es interesante aclarar, cuando hay también soluciones no nulas.

Teorema 3.3. *Si el número de ecuaciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales es menor que el número de incógnitas, éste tiene por lo menos una solución no nula.*

Demostración. Reduzcamos el sistema homogéneo dado al aspecto escalonado. Se sobreentiende que éste queda homogéneo. Está claro que el número de incógnitas principales no puede sobrepasar el número de filas. Por consiguiente, existen las incógnitas libres, lo que

asegura la existencia de las soluciones no nulas: en efecto, a las incógnitas libres pueden ser atribuidos también los valores no nulos.

Teorema 3.4. *El sistema escalonado homogéneo de n ecuaciones lineales con n incógnitas posee las soluciones no nulas en aquel y sólo aquel caso, cuando su matriz contiene la fila nula.*

Demostración. Si hay fila nula, entonces, de acuerdo con el teorema 1.1, ésta puede ser rechazada y la existencia de las soluciones no nulas se infiere del teorema 3.3. Si, por lo contrario, no hay filas nulas, todas las incógnitas resultan principales y, puesto que todos los miembros libres son iguales a 0, sucesivamente (¡comenzando del final!) obtenemos que todas las incógnitas deben igualarse a cero.

Teorema 3.5. *Si las filas $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_t$ son las soluciones de la ecuación*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0, \tag{3.6}$$

entonces para cualesquiera números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ la fila

$$\overline{u} = \lambda_1\overline{u}_1 + \ldots + \lambda_t\overline{u}_t$$

también es la solución de esta ecuación.

Demostración. Sea que

$$\overline{u}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, t).$$

Entonces

$$\overline{u} = (\lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_t\alpha_{t1}, \ldots, \lambda_1\alpha_{1n} + \ldots + \lambda_t\alpha_{tn}).$$

En vista de que $\overline{u}_i$ son las soluciones de la ecuación (3.6), entonces

$$a_1(\lambda_1\alpha_{11} + \ldots + \lambda_t\alpha_{t1}) + \ldots + a_n(\lambda_1\alpha_{1n} + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_t\alpha_{tn}) = \lambda_1(a_1\alpha_{11} + \ldots + a_n\alpha_{1n}) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda_t(a_1\alpha_{t1} + \ldots + a_n\alpha_{tn}) = \lambda_1 \cdot 0 + \ldots + \lambda_t \cdot 0 = 0,$$

es decir, $\overline{u}$ resulta la solución de la ecuación (3.6).

Al resumir los resultados de este párrafo se puede decir que poseemos el método que permite resolver cualquier sistema de ecuaciones lineales, es decir, o sea establecer que éste no tiene soluciones, o sea indicar su única solu-

ción, o sea, eligiendo las incógnitas libres, expresar por éstas las restantes. Este método a menudo se llama método de Gauss o bien método de eliminación sucesiva de incógnitas. Sin embargo, queda poco claro si depende o no el número de incógnitas libres del procedimiento de solución. Además, incluso en el caso, cuando no existe tal dependencia, queda abierta la cuestión: ¿si existe para dicho juego de incógnitas el método de solución, con el cual precisamente estas incógnitas resultarán libres? Recordemos que en el párrafo 1 fue ofrecido un sistema con incógnitas libres, pero no cualquier incógnita del cual puede ser anunciada libre. Y la importancia de conocer los números de incógnitas, que pueden ser llamadas libres, es muy difícil revalorar. Supongamos que el sistema de ecuaciones lineales surgió de cualquier problema de ingeniería. Si es imposible aclarar la incógnita libre, es imposible maniobrar con su valor, para que se logre la solución más admisible desde el punto de vista de ingeniería. Así, por ejemplo, en el problema sobre los tubos examinado en el párrafo 1 las restricciones adicionales pueden ser superpuestas solamente sobre el volumen del agua que trasiega por los tubos primero, segundo y cuarto.

Responder a las cuestiones planteadas anteriormente permite la teoría que se desarrolla en los párrafos que siguen.

EJERCICIOS

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a)
$$\begin{aligned} 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 12x_4 &= 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 2; \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 &= 3, \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 2, \\ -3x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 15x_4 &= 1; \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 9x_1 - 20x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1, \\ 4x_1 - 9x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 &= 8 \end{aligned}$$

(**indicación**: para simplificar los cálculos se puede inicialmente de la primera fila sustraer la segunda fila duplicada);

d) $12x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13,$
$4x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3,$
$8x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7;$

e) $-6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4,$
$-2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2,$
$-4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3;$

f) $x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0,$
$3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0,$
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0,$
$3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0;$

g) $x_1 - x_3 = 0,$
$x_2 - x_4 = 0,$
$-x_1 + x_3 - x_5 = 0,$
$-x_2 + x_4 - x_6 = 0,$
$-x_3 + x_5 = 0,$
$-x_4 + x_6 = 0;$

h) $x_1 - x_3 + x_5 = 0,$
$x_2 - x_4 + x_6 = 0,$
$x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0,$
$x_2 - x_3 + x_6 = 0,$
$x_1 - x_4 + x_5 = 0;$

i) $5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0,$
$2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0,$
$7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0,$
$5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0;$

j) $3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0,$
$5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0,$
$4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0$
$7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0,$

k) $x_1 + x_2 = 0,$
$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$
$x_2 + x_3 + x_4 = 0,$
. . . .
$x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0,$
$x_{n-1} + x_n = 0.$

2. Resolver los problemas enunciados en el ejercicio 1 del párrafo 1. En el problema b) hallar adicionalmente las soluciones con el número máximo posible de monedas de 20 y 15 kópeks. En el problema *e*) hay que encontrar las soluciones correspondientes al empleo máximo y mínimo de la hormigonera de menor potencia, si se exige que el número de horas que trabaja sea entero.

5—01568

3. El sistema de ecuaciones lineales es homogéneo cuando y sólo cuando la fila nula es su solución (demostrar).

4. Componer un sistema que conste de dos ecuaciones lineales, para el cual las filas (1, 1, 1, 1) y (1, 2, 2, 1) sirven de soluciones.

5. Demostrar que rechazando la fila de la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales, que es la combinación lineal de las filas restantes, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales equivalente al inicial.

6. Enunciar y demostrar las condiciones para los elementos de la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales con n incógnitas necesarias y suficientes para que cualquier fila de longitud n sirva de solución de este sistema.

7. ¿Si puede el sistema de ecuaciones lineales con los coeficientes reales tener con exactitud dos distintas soluciones?

§ 4.
RANGO DE UNA MATRIZ

Una matriz cuadrada llámase *degenerada*, si con ayuda de un número finito de transformaciones elementales de las filas ésta puede ser convertida en una matriz que tenga por lo menos una fila nula.

Teorema 4.1. *Las siguientes propiedades de la matriz cuadrada A son equivalentes:*

(1) A es la matriz degenerada;

(2) el sistema de ecuaciones lineales homogéneas con la matriz A tiene por lo menos una solución no nula;

(3) co⁻ cualquier procedimiento de reducción de la matriz A al aspecto escalonado mediante transformaciones elementales la matriz escalonada que se obtiene contiene una fila nula.

Demostración. La afirmación del teorema consiste en que al cumplir cualquier propiedad (1) . . . (3) son justas también todas las demás. Para establecer esto demostremos que de la propiedad (1) se desprende la propiedad (2), de (2), la propiedad (3) y de 3, la propiedad (1) (fig. 1), de donde se deduce también la equivalencia buscada de todas las tres propiedades.

Durante toda esta demostración acordemos designar por $\bar{A}$ la matriz obtenida de A adjuntando a la derecha la columna nula.

(1) $\Rightarrow$ (2). Si A es la matriz degenerada, entonces según la definición después de cumplir el número finito de transformaciones elementales convenientes de las filas ésta se convierte en la matriz B con la fila nula. Las mismas transformaciones elementales convierten la matriz $\bar{A}$ en la $\bar{B}$. En este caso la matriz $\bar{B}$ contiene la fila nula, cuya eliminación lleva al sistema que es equivalente al sistema con la matriz ampliada $\bar{B}$. Pero el número de

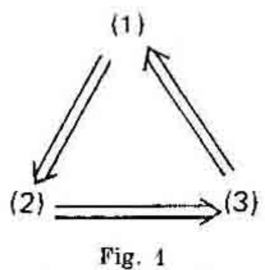


Fig. 1

ecuaciones en este sistema es menor que el número de incógnitas y, de acuerdo con el teorema 3.3, éste posee la solución no nula. Por consiguiente, la solución no nula posee el sistema con la matriz ampliada $\bar{B}$ y, precisamente, también equivalente a éste según el teorema 3.2 el sistema con la matriz $\bar{A}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supongamos que C es la matriz escalonada obtenida de A mediante el número finito de transformaciones elementales. Entonces la matriz $\bar{C}$ se obtiene de la matriz $\bar{A}$ por medio de las mismas transformaciones elementales. Del teorema 3.2 se infiere que el sistema con la matriz ampliada $\bar{C}$ posee la solución no nula. Ahora la existencia de la fila nula en la matriz $\bar{C}$ y, precisamente, en la matriz C se desprende del teorema 3.4.

(3) $\Rightarrow$ (1). Es suficiente recordar que según el teorema 2.6 la matriz A se reduce al tipo escalonado y aprovechar la propiedad (3).

Teorema 4.2. *Si A es una matriz degenerada y de A a B se puede pasar mediante un número de transformaciones elementales, entonces B es una matriz degenerada.*

Demostración. Según el teorema 2.4 de la matriz B a la matriz A se puede pasar con ayuda de un número finito de transformaciones elementales de las filas. Por otro lado, según la definición de la matriz degenerada, el número finito de transformaciones elementales convenientes de las filas permite pasar de la matriz A a la matriz C, que tiene una fila nula. Por consiguiente, de B a C también se puede pasar mediante un número finito de transformaciones elementales de las filas y la degeneración de la matriz B se infiere de la definición.

Teorema 4.3. *Si A es una matriz degenerada y la matriz B está obtenida de A multiplicando una de sus filas por el número real λ, entonces B también es una matriz degenerada.*

Demostración. Si $\lambda = 0$, entonces la matriz B resulta degenerada según la definición. Si por lo contrario $\lambda \neq 0$, entonces del teorema 3.1 se desprende que el sistema de ecuaciones lineales homogéneas con las matrices A y B son equivalentes. Pero, de acuerdo con el teorema 4.1, el sistema de ecuaciones lineales homogéneas con la matriz A posee la solución no nula. Por consiguiente, el sistema de ecuaciones lineales homogéneas con la matriz B también posee la solución no nula, y la degeneración de la matriz B se desprende del teorema 4.1.

Teorema 4.4. *Si las matrices*

$$A' = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \dots & a'_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\| \text{ y}$$

$$A'' = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \dots & a''_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix} \right\|$$

son degeneradas, entonces la matriz

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \dots & a'_{in}+a''_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\|$$

es también degenerada.

Demostración. Según el teorema 4.1 los sistemas de ecuaciones lineales homogéneas con las matrices A' y A'' poseen soluciones no nulas. Supongamos que

$$\overline{u}'=(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$$

y

$$\overline{u}''=(\alpha''_1, \dots, \alpha''_n)$$

son estas soluciones. Está claro, que tanto la fila $\overline{u}'$, como también la fila $\overline{u}''$ satisfacen todas las ecuaciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneas con la matriz A, salvo, puede ser la i-ésima. En vigor del teorema 3.5 estas ecuaciones satisfacen cualesquiera filas de aspecto $\lambda\overline{u}' - \mu\overline{u}''$, donde λ y μ son los números reales arbitrarios. Supongamos que

$$\lambda=a'_{i1}\alpha''_1+\dots+a'_{in}\alpha''_n$$

y

$$\mu=a''_{i1}\alpha'_1+\dots+a''_{in}\alpha'_n.$$

Entonces

$$(a'_{i1}+a''_{i1})(\lambda\alpha'_1-\mu\alpha''_1)+\dots+(a'_{in}+a''_{in})(\lambda\alpha'_n-\mu\alpha''_n)=$$
$$=\lambda(a'_{i1}\alpha'_1+\dots+a'_{in}\alpha'_n)+\lambda(a''_{i1}\alpha'_1+\dots+a''_{in}\alpha'_n)-$$
$$-\mu(a'_{i1}\alpha''_1+\dots+a'_{in}\alpha''_n)-\mu(a''_{i1}\alpha''_n+\dots+a''_{in}\alpha''_n)=$$
$$=\lambda 0+\lambda\mu-\mu\lambda-\mu 0=0.$$

Por consiguiente, si la fila $\lambda\overline{u}' - \mu\overline{u}'' \neq \overline{0}$, ésta resulta la solución no nula del sistema de ecuaciones lineales homogéneas con la matriz A, lo que en vigor del teorema 4.1 demuestra la degeneración de la matriz A. Ahora

supongamos que $\lambda\overline{u}' - \mu\overline{u}'' = \overline{0}$. Si, con ello, $\mu \neq 0$, entonces $\overline{u}'' = \frac{\lambda}{\mu}\overline{u}'$, de donde

$$(a'_{i1} + a''_{i1})\alpha''_1 + \ldots + (a'_{in} + a''_{in})\alpha''_n =$$
$$= \frac{\lambda}{\mu}(a'_{i1}\alpha'_1 + \ldots + a'_{in}\alpha'_n) + (a''_{i1}\alpha''_1 + \ldots + a''_{in}\alpha''_n) =$$
$$= \frac{\lambda}{\mu}\,0 + 0 = 0.$$

Por consiguiente, el sistema de ecuaciones lineales homogéneas con la matriz A de nuevo posee la solución no nula $\overline{u}''$, y, como también anteriormente, la degeneración de la matriz A se desprende del teorema 4.1. Si, por fin, $\mu = 0$, entonces

$$(a'_{i1} + a''_{i1})\alpha'_1 + \ldots + (a'_{in} + a''_{in})\alpha''_n =$$
$$= (a'_{i1}\alpha'_1 + \ldots + a'_{in}\alpha'_n) + (a''_{i1}\alpha'_1 + \ldots a''_{in}\alpha'_n) =$$
$$= 0 + \mu = 0 + 0 = 0.$$

Otra vez en el sistema de ecuaciones lineales homogéneas con la matriz A se había hallado la solución no nula $\overline{u}'$, y se puede de nuevo hacer uso del teorema 4.1.

Si en la matriz A se fijan cualesquiera k filas y k columnas, entonces los elementos, que se encuentran en la intersección de las filas y columnas marcadas, forman una matriz cuadrada de orden k, es decir, *la submatriz* de la matriz A. El orden más alto de las submatrices no degeneradas de la matriz A se llama su *rango*. Es obvio, que el rango de la matriz de dimensión $m \times n$ no supera al menor de los números m y n. Si por lo contrario en la matriz A no hay submatrices no degeneradas, entonces su rango según la definición es igual a cero. Está claro, que las matrices nulas, si y sólo si, no contienen submatrices no degeneradas, de esta manera el rango de la matriz A equivale a cero cuando y sólo cuando A es la matriz nula.

Teorema 4.5. *El rango de la matriz escalonada es igual al número de sus filas no nulas.*

Demostración. Si $A = 0$, entonces su rango equivale a cero según la definición. Si por lo contrario A es una matriz escalonada no nula, en este caso supongamos que ésta contiene r filas no nulas. Entonces, al marcar las

filas y columnas no nulas, en las cuales se disponen sus líderes, obtenemos una submatriz escalonada que no contiene filas nulas. Según el teorema 4.1 esta submatriz es no degenerada, de esta manera la matriz A contiene la submatriz no degenerada de orden r. Pero, cualquier submatriz de mayor orden contiene la fila nula y por definición resulta degenerada.

Para nuestra investigación tiene el valor decisivo

Teorema 4.6. *El rango de la matriz no cambia con las transformaciones elementales de las filas.*

Primeramente será demostrado

Lema. *Si de la matriz A a la matriz B se puede pasar mediante un número finito de transformaciones elementales de las filas, (el rango B) $\leqslant$ (el rango A).*

Establezcamos la justeza de este lema para el caso cuando fue aplicada una sola transformación elemental. Supongamos que (el rango A) $= r$. Para la demostración del lema es suficiente cerciorarse de que cualquier submatriz M de la matriz B de orden mayor que r resulta degenerada. Si de la matriz A a la B se pasó mediante el cambio de lugares de dos filas, entonces la submatriz M o sea coincide con cierta submatriz M' de la matriz A, cuyo orden es mayor que r, o sea se diferencia de tal submatriz M' solamente con el orden de las filas. En vista de que (el rango A) $= r$, entonces M' es la matriz degenerada y la degeneración de la matriz M se deduce del teorema 4.2. Ahora supongamos que el paso a la matriz B fue realizado mediante la adición a la i-ésima fila de la matriz A de su j-ésima fila multiplicada por λ. Son posibles tres casos: 1) la i-ésima fila no pasa por la submatriz M; 2) tanto la i-ésima, como la j-ésima filas pasan por la submatriz M; 3) la i-ésima fila pasa por la submatriz M, mientras que la j-ésima fila no pasa. En el primer caso la submatriz M coincide con la correspondiente submatriz de la matriz A y, por consiguiente, resulta degenerada. En el segundo caso tenemos

$$M = \left\| \begin{matrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{ik_1} + \lambda a_{jk_1} & \ldots & a_{ik_s} + \lambda a_{jk_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{jk_1} & \ldots & a_{jk_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\| .$$

Está claro que la matriz M se obtiene de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

con ayuda de la transformación elemental de segundo tipo. Pero la matriz M', siendo la submatriz de la matriz A de orden mayor que r, es degenerada. Según el teorema 4.2 debe ser degenerada también la matriz M. En el tercer caso anotemos

$$M = \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik_1} + \lambda a_{jk_1} & \dots & a_{ik_s} + \lambda a_{jk_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|,$$

$$M' = \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{ik_1} & \dots & a_{ik_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|, \quad M'' = \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{jk_1} & \dots & \lambda a_{jk_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|$$

y

$$M''' = \left\| \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{jk_1} & \dots & a_{jk_s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \right\|.$$

La matriz M' es la submatriz de la matriz A, mientras que M''' se distingue de cierta submatriz de la matriz A solamente por el orden de filas. Puesto que el orden de estas matrices supera a r, entonces, teniendo en cuenta el teorema 4.2, ambas éstas resultan degeneradas. Del teorema 4.3 se desprende la degeneración de la matriz M'', después de lo que la degeneración de la matriz M es la consecuencia del teorema 4.4. Por lo tanto, para el caso cuando se utiliza una sola transformación elemental, el lema está demostrado. Supongamos que fue aplicado el k número de transformaciones. Sea que

$$A, C_1, \dots, C_{k-1}, B$$

es una sucesión de las matrices aparecidas durante la ejecución de estas transformaciones. En vigor de lo

demostrado

$$(\text{el rango } B) \leqslant (\text{el rango } C_{k-1}) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant (\text{el rango } C_1) \leqslant (\text{el rango } A).$$

Demostración del teorema. Supongamos que de la matriz A a la B hemos pasado mediante un número finito de transformaciones elementales. A causa del lema (el rango B) $\leqslant$ (el rango A). Sin embargo, si las transformaciones elementales permiten pasar de A a B, entonces de acuerdo con el teorema 2.4 de B a A se puede pasar también mediante un número finito de transformaciones elementales. Aplicando una vez más el lema obtenemos que (el rango A) $\leqslant$ (el rango B). La igualdad requerida se desprende de inmediato de las desiguadades obtenidas.

Los teoremas 2.6, 4.6 y 4.5 ofrecen el procedimiento práctico para calcular el rango de la matriz: se debe reducir la matriz al aspecto escalonado y contar el número de filas no nulas de la matriz escalonada obtenida. En particular, los cálculos expuestos al final del párrafo 2 testimonian que

$$\text{rango} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{Vmatrix} = 2,$$

$$\text{rango} \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \text{rango} \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{Vmatrix} = 3.$$

EJERCICIOS

1. Hallar el rango de las matrices indicadas en el ejercicio 7 del párrafo 2.
2. Encontrar el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{Vmatrix} 18 & 7 & 4 & 8 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \\ 17 & 3 & 1 & 7 \\ 40 & 17 & 10 & 18 \end{Vmatrix}$;

b) $\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -7 & -7 & 6 & 0 \\ 8 & -4 & 3 & -1 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -2 & 1 & -2 \end{matrix} \right\|$;

c) $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{matrix} \right\|$;

d) $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|$;

e) $\left\| \begin{matrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{matrix} \right\|$.

3. Si A y B son matrices con igual número de columnas, entonces

$$\left(\text{el rango } \left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\| \right) \leqslant (\text{el rango } A) + (\text{el rango } B).$$

4. Si A y B son matrices con idéntico número de filas, entonces

$$\left(\text{el rango } \left\| \begin{matrix} A & B \end{matrix} \right\| \right) \leqslant (\text{el rango } A) + (\text{el rango } B).$$

5. Si A y B son matrices con igual dimensión, entonces

$$\text{el rango} \left\| \begin{matrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{matrix} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant (\text{el rango } A) + (\text{el rango } B).$$

Indicación: hacer uso del ejercicio 3.

6. Sea A la matriz no degenerada de dimensión $n \times n$, B, la matriz de dimensión $p \times q$, C, la matriz de dimensión $n \times q$ y O, la matriz no nula de dimensión $p \times n$. Demostrar:

a) el rango $\begin{Vmatrix} A & C \\ O & B \end{Vmatrix} = n +$ (el rango B);

b) si kD designa la matriz obtenida de la matriz D multiplicando todos sus elementos por el número k, y $p = n$, entonces

$$\text{el rango} \begin{Vmatrix} A & B \\ 2A & 5B \end{Vmatrix} = n + (\text{el rango } B).$$

7. El rango de la matriz no cambia, si le añadimos la fila que es la combinación lineal de las filas de esta matriz.

8. Demostrar que aplicando las transformaciones elementales de las filas y columnas de todos los tres tipos, cualquier matriz del rango r puede ser convertida en tal matriz D, que $d_{11} = \ldots = d_{rr} = 1$, mientras que en todos los demás lugares se encuentran ceros.

9. Demostrar que si A es una matriz cuadrada de orden n, con la particularidad de que su rango es igual a n, entonces ejecutando las transformaciones elementales de segundo tipo con las filas y columnas se puede reducir la matriz A al aspecto

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d \end{Vmatrix}.$$

10. Si cierta columna de la matriz cuadrada A es la combinación lineal de las demás, A es una matriz degenerada.

Indicación: hacer uso del teorema 4.1.

§ 5.
TEOREMA DE LAS INCÓGNITAS PRINCIPALES

El sistema de ecuaciones lineales se denomina compatible, si éste tiene solución. En particular, el sistema homogéneo de ecuaciones lineales siempre es compatible.

Teorema 5.1 (teorema de Kronecker — Capelli). *El sistema de ecuaciones lineales es compatible cuando y sólo cuando el rango de la matriz del sistema es igual al rango de su matriz ampliada.*

Demostración. Como de acuerdo con los teoremas 2.6 y 3.2 de cada sistema de ecuaciones lineales se puede pasar al sistema escalonado equivalente a éste, mientras que los rangos de la matriz del sistema y de su matriz ampliada en vigor del teorema 4.6, con ello, no cambiarán es suficiente establecer la validez del teorema para el sistema escalonado. Pero, para el sistema escalonado en vigor del teorema 4.5 los rangos de la matriz del sistema y de su matriz ampliada son equivalentes cuando y sólo cuando estas matrices tienen igual número de filas no nulas, o bien, lo que es lo mismo, si, y sólo si, el primer elemento no nulo de la fila no nula última de la matriz ampliada se encuentra en la columna de los miembros libres. Del análisis del sistema escalonado realizado en el párrafo 3 es sabido que esto tiene lugar cuando y sólo cuando el sistema es compatible.

Cuando en el párrafo 3 hablamos sobre las incógnitas principales y libres, estos conceptos dependían del procedimiento de reducción de la matriz ampliada del sistema al aspecto escalonado. Para resolver los problemas examinados al final del párrafo 3 es necesario tener una definición que dependa solamente del sistema dado de ecuaciones lineales. Con este objeto, si está dado el sistema de ecuaciones lineales respecto a las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, acordemos decir, que las *incógnitas* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ *pueden ser anunciadas principales*, si con cualquier prefijación de las demás incógnitas los valores de éstas se determinan unívocamente. Acerca de todas estas incógnitas restantes diremos que éstas *pueden ser anunciadas libres*. Subrayamos que en las dos últimas frases se definen los términos «pueden ser anunciadas libres», «pueden ser anunciadas principales» y no los conceptos «incógnita principal» o «incógnita libre». Las incógnitas se hacen principales o bien libres solamente después de que nosotros, realizando la posibilidad existente, las anunciemos de tal tipo. Está claro que las incógnitas principales y libres en sentido definido en el párrafo 3 pueden ser anunciadas de tal tipo también en sentido de nuestra nueva definición.

El resultado central de nuestra teoría es

Teorema 5.2 (teorema sobre las incógnitas principales). *Supongamos que hay un sistema compatible m de ecuaciones lineales con n incógnitas,* $\widetilde{A}$ *es la matriz ampliada de este sistema y (el rango* $\widetilde{A}$*)* $= r$. *En este caso las incógnitas* $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ *pueden ser anunciadas principales cuando y sólo cuando* $k = r$ *y en las columnas de la matriz A con los números* $i_1, \ldots, i_k$ *se dispone la submatriz no degenerada de orden r.*

Demostración. Supongamos que $k = r$ y en las columnas con los números indicados se encuentra la submatriz no degenerada de orden r. Entonces el rango de la matriz

$$\begin{Vmatrix} a_{1i_1} & a_{1i_2} & \ldots & a_{1i_r} \\ a_{2i_1} & a_{2i_2} & \ldots & a_{2i_r} \\ a_{mi_1} & a_{mi_2} & \ldots & a_{mi_r} \end{Vmatrix}$$

de dimensión $m \times r$ es igual a r. Al reducir esta matriz al tipo escalonado en vigor de los teoremas 4.5 y 4.6 obtenemos la matriz

$$\begin{Vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_r} \\ 0 & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ri_r} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

donde $b_{1i_1}, b_{2i_2}, \ldots, b_{ri_r} \neq 0$. Al aplicar las mismas transformaciones elementales para la matriz $\widetilde{A}$ obtenemos la matriz

$$\widetilde{B} = \left\Vert \begin{array}{ccccccc|c} \ldots & b_{1i_1} & \ldots & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_r} & \ldots & c_1 \\ \ldots & 0 & \ldots & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_r} & \ldots & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & b_{ri_r} & \ldots & c_r \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & c_{r+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & c_m \end{array} \right\Vert .$$

Subrayemos que esta anotación no significa que todas las filas de la matriz $\widetilde{B}$, a partir de la $(r+1)$-ésima, son nulas: en las columnas con los números diferentes de $i_1, i_2, \ldots, i_r$ pueden encontrarse los elementos no nulos que están en estas filas. Sin embargo, en realidad todas las filas de la matriz $\widetilde{B}$ iniciando de la $(r+1)$-ésima son nulas. Verdaderamente, supongamos que esto no es así, es decir, $b_{pq}=0$ para ciertas p y q, donde $r+1 \leqslant p \leqslant \leqslant m$. Ciertamente, $q \neq i_1, \ldots, i_r$. Sin embargo, puede suceder que $q=n+1$, es decir, $b_{pq}=c_p$. Sea M la submatriz de la matriz $\widetilde{B}$ de orden $r+1$ dispuesta en las filas con los números $1, 2, \ldots, r, p$ y en las columnas con los números $i_1, \ldots, i_r, q$. Son posibles los siguientes tres casos: 1) $q<i_1$; 2) $i_s<q<i_{s+1}$ para cierto s; 3) $i_r<q$. Conmutando, si es necesario, las filas de la matriz M llegamos a la matriz M' que es igual a

$$\begin{Vmatrix} b_{pq} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{1q} & b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i} \\ b_{2q} & 0 & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{rq} & 0 & 0 & \ldots & b_{ri_r} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} b_{1i_1} & \ldots & b_{1i_s} & b_{1q} & b_{1i_{s+1}} & \ldots & b_{1i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & b_{si_s} & b_{sq} & b_{si_{s+1}} & \ldots & b_{si_r} \\ 0 & \ldots & 0 & b_{pq} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & b_{s+1q} & b_{s+1i_{s+1}} & \ldots & b_{s+1i_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & b_{rq} & 0 & \ldots & b_{ri_r} \end{Vmatrix}$$

o bien

$$\begin{Vmatrix} b_{1i_1} & b_{1i_2} & \ldots & b_{1i_r} & b_{1q} \\ 0 & b_{2i_2} & \ldots & b_{2i_r} & b_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{ri_r} & b_{rq} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & b_{pq} \end{Vmatrix},$$

respectivamente. Dado que $b_{1i_1}, b_{2i_2}, \ldots, b_{ri_r}, b_{pq} \neq 0$, en el tercer caso la matriz M' en seguida resulta escalonada. Por lo contrario en los primeros dos casos ésta puede ser convertida a la escalonada con ayuda de las transformaciones elementales haciendo anulación de los elementos $b_{1q}, b_{2q}, \ldots, b_{rq}$ y $b_{s+1q}, \ldots, b_{rq}$, respectivamente (véase el teorema 2.3). En vigor de los teoremas 4.5 y 4.6

$$(\text{el rango } M) = (\text{el rango } M') = r+1.$$

Por consiguiente, M es una matriz no degenerada y, tomando en consideración la definición del rango de la matriz y el teorema 4.6, obtenemos

$$(\text{el rango } \widetilde{A}) = (\text{el rango } \widetilde{B}) \geqslant r+1,$$

lo que contradice al planteamiento. Por lo tanto, rechazando en la matriz $\widetilde{B}$ las filas nulas, llegamos al sistema de ecuaciones lineales que contiene r ecuaciones. Al atribuir a las incógnitas, diferentes de $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, los valores arbitrarios y trasladándolas al segundo miembro, es fácil de cerciorarse de que las incógnitas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ se determinan unívocamente una por otra, comenzando por la última. De tal guisa, éstas pueden ser anunciadas principales. En vigor de los teoremas 1.1 y 3.2 lo mismo es válido también para el sistema inicial de ecuaciones lineales.

Ahora supongamos que las incógnitas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ pueden ser anunciadas principales. Al suponer las incógnitas restantes iguales a cero, llegamos al sistema

$$\begin{array}{c} a_{1i_1}x_{i_1} + \ldots + a_{1i_k}x_{i_k} = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{mi_1}x_{i_1} + \ldots + a_{mi_k}x_{i_k} = b_m \end{array} \qquad (5.1)$$

que tiene la única solución. Sea $\widetilde{C}$ la matriz ampliada del sistema (5.1) y $\widetilde{B}$, la matriz escalonada, a la cual, de acuerdo con el teorema 2.6, se reduce la matriz $\widetilde{C}$. En vigor del teorema 3.2 el correspondiente sistema de ecuaciones lineales tiene la única solución. Como muestra

el análisis del sistema escalonado efectuado en el párrafo 3, de aquí se desprende que la matriz $\tilde{B}$ contiene k filas no nulas, con la particularidad de que sus líderes se disponen en las primera, segunda, tercera, etc. columnas. Con otras palabras

$$\tilde{B}=\left\|\begin{array}{cccc|c} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} & c_1 \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2k} & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & b_{kk} & c_k \end{array}\right\|.$$

Según los teoremas 4.5 y 4.6

$$k = \text{el rango } \tilde{B} = \text{el rango } \tilde{C} \leqslant \text{el rango } \tilde{A} = r.$$

Supongamos que $k < r$. Apliquemos a la matriz $\tilde{A}$ las transformaciones elementales, con ayuda de las cuales fue realizado el paso de $\tilde{C}$ a $\tilde{B}$. Entonces la matriz $\tilde{A}$ se convierte en la matriz

$$\tilde{D}=\left\|\begin{array}{ccccccccc} \ldots & b_{11} & \ldots & b_{12} & \ldots & b_{1k} & \ldots & c_1 \\ \ldots & 0 & \ldots & b_{22} & \ldots & b_{2k} & \ldots & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & b_{kk} & \ldots & c_k \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & c_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & c_m \end{array}\right\|,$$

con la particularidad de que las columnas de esta matriz ocupadas por las columnas de la matriz $\tilde{B}$ tienen los números $i_1, \ldots, i_k, n+1$. En vigor del teorema 4.6 (el rango $\tilde{D}$) $= r$, mientras que según el teorema 3.2 el sistema de ecuaciones lineales con la matriz ampliada $\tilde{D}$ es compatible y las incógnitas $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ pueden ser anunciadas principales. Del teorema 5.1 se infiere que el mismo rango tiene también la matriz D obtenida de $\tilde{D}$ mediante el rechazo de la última columna. Puesto que $k < r$ entre las filas de la matriz D con los números

mayores que k hay filas no nulas, ya que en el caso contrario ésta no podría contener las submatrices no degeneradas de orden r. Sin embargo, el elemento no nulo de tal fila no puede encontrarse en la columna ocupada por las columnas de la matriz $\tilde{B}$. Así, pues, la matriz $\tilde{D}$ contiene los elementos $d_{pq} \neq 0$, donde $p > k$ y $q \neq \neq i_1, \ldots, i_k, n+1$. Si supongamos ahora iguales a cero todas las incógnitas con los números diferentes de $i_1, \ldots, i_k, q$, entonces obtenemos $x_q = c_p/d_{pq}$. Por esta razón, x_q no puede ser tomada arbitraria, lo que contradice a la posibilidad de anunciar $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ principales incógnitas. Por consiguiente, $k = r$, con lo que se concluye la demostración.

Del teorema que acabamos de demostrar se desprende que en el sistema (1.6) pueden ser anunciados principales o bien x_1 y x_3, o bien x_2 y x_3, o bien x_3 y x_4, mientras que los pares restantes no pueden anunciarse principales.

Detengamos en un procedimiento más de descripción de las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Del teorema 3.5 se desprende que el conjunto de todas las soluciones de dicho sistema homogéneo de ecuaciones lineales de n incógnitas, juntamente con cualquier familia de las n-ésimas filas, contiene también su combinación lineal. Por esta razón es natural el deseo de hallar tal familia de soluciones (en la medida de lo posible, la menor), para que todas las soluciones restantes fuesen las combinaciones lineales de esta familia. Una de tales familias la indica el siguiente teorema:

Teorema 5.3. *Supongamos que las incógnitas $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales de n incógnitas con la matriz A del rango r pueden ser anunciadas libres. Para cada k, donde $1 \leqslant k \leqslant n-r$, designemos por $\bar{u}_k$, la única solución del sistema que se obtiene, si a la incógnita x_{i_k} se le atribuye el valor de 1 y a las restantes incógnitas libres, el valor de 0. En este caso cualquier solución del sistema a examinar es la combinación lineal de la familia $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-r}$.*

Demostración. Sea que

$$\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

es la solución arbitraria del sistema a examinar. Analicemos la fila

$$\overline{w} = v_{i_1}\overline{u}_1 + v_{i_2}\overline{u}_2 + \ldots + v_{i_{n-r}}\overline{u}_{i_{n-r}}.$$

Según el teorema 3.5 $\overline{w}$ es también la solución de este sistema. No es difícil de calcular que las coordenadas i_1-ésima, i_2-ésima, . . ., i_{n-r}-ésima de la fila $\overline{w}$ equivalen a $v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{n-r}}$, respectivamente. Por otras palabras los valores de las incógnitas $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{n-r}}$ en las soluciones $\overline{v}$ y $\overline{w}$ son los mismos. Pero, de la definición de la posibilidad de anunciar las incógnitas como libres se desprende, que la prefijación de los valores de las incógnitas enumeradas determina unívocamente los valores de las demás incógnitas. Por consiguiente, también las restantes coordenadas de las filas $\overline{v}$ y $\overline{w}$ deben coincidir, es decir,

$$\overline{v} = \overline{w} = v_{i_1}\overline{u}_1 + v_{i_2}\overline{u}_2 + \ldots + \overline{v}_{i_{n-r}}u_{n-r},$$

lo que se requería demostrar.

La imposibilidad de disminuir el número de soluciones que entran en la familia hallada antes se deduce de tal resultado:

Teorema 5.4. *Si cualquier solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales de n incógnitas con la matriz A del rango r es la combinación lineal de las soluciones* $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_s$, *entonces* $s \geqslant n - r$.

Demostración. Sea que $s < n - r$. Supongamos que

$$\overline{v}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in}) \quad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

y, teniendo en cuenta el teorema 5.2 designemos por

$$\overline{u}_j = (\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jn}) \quad (j = 1, 2, \ldots, n - r)$$

las soluciones examinadas en el teorema 5.3. Según lo enunciado

$$\overline{u}_j = a_{1j}\overline{v}_1 + \ldots + a_{sj}\overline{v}_s \quad (j = 1, 2, \ldots, n - r)$$

para los convenientes números reales a_{ij}. Analicemos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n-r}x_{n-r} &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2\,n-r}x_{n-r} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{s\,n-r}x_{n-r} &= 0. \end{aligned}$$

Por supuesto el número de ecuaciones de este sistema es menor que el número de incógnitas y, en vigor del teorema 3.3, éste posee soluciones no nulas, por ejemplo, $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-r})$. Al advertir que los números $\xi_1, \ldots, \xi_{n-r}$ son las coordenadas i_1-ésima, i_2-ésima, $\ldots$, i_{n-r}-ésima de la fila

$$\bar{w} = \xi_1 \bar{u}_1 + \xi_2 \bar{u}_2 + \ldots + \xi_{n-r} \bar{u}_{n-r},$$

y tomando en consideración los teoremas 2.1 y 2.2 obtenemos

$$\begin{aligned}
\bar{0} \neq \bar{w} = \xi_1 (a_{11}\bar{v}_1 + a_{21}\bar{v}_2 + \ldots + a_{s1}\bar{v}_s) + \\
+ \xi_2 (a_{12}\bar{v}_1 + a_{22}\bar{v}_2 + \ldots + a_{s2}\bar{v}_s) + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ \xi_{n-r} (a_{1n-r}\bar{v}_1 + a_{2n-r}\bar{v}_2 + \ldots + a_{sn-r}\bar{v}_s) = \\
= (\xi_1 a_{11} + \xi_2 a_{12} + \ldots + \xi_{n-r} a_{1n-r}) \bar{v}_1 + \\
+ (\xi_1 a_{21} + \xi_2 a_{22} + \ldots + \xi_{n-r} a_{2n-r}) \bar{v}_2 + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ (\xi_1 a_{s1} + \xi_2 a_{s2} + \ldots + \xi_{n-r} a_{rn-s}) \bar{v}_s = \\
= 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + \ldots + 0\bar{v}_s = \bar{0}.
\end{aligned}$$

La contradicción obtenida concluye la demostración del teorema.

De tal modo, el teorema 5.3 muestra que todas las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales pueden ser obtenidas examinando las combinaciones lineales de todo género de cierto sistema finito le soluciones.

Para obtener una descripción tan clara del conjunto de todas las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales, prostemos atención a los siguientes hechos:

Teorema 5.5. a) *Si $\bar{u}$ es la solución del sistema de ecuaciones lineales con la matriz A, y $\bar{v}$, la solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la misma matriz A, entonces $\bar{u} + \bar{v}$ es la solución del primero de estos sistemas.*

b) *Si $\bar{u}_0$ es alguna solución del sistema de ecuaciones lineales con la matriz A, entonces cualquier solución $\bar{u}$ de este sistema se representa en forma de la suma $\bar{u}_0 + \bar{v}$, donde $\bar{v}$ es alguna solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con aquella misma matriz A.*

Demostración. Supongamos que b_i es el miembro libre de la i-ésima ecuación del sistema a examinar.

a) *Si* $\overline{u} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y $\overline{v} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, entonces, sustituyendo las coordenadas de la fila $\overline{u} + \overline{v}$ en la i-ésima ecuación del sistema que se analiza, obtenemos

$$\begin{aligned} a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + \ldots + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) &= \\ = (a_{i1}\alpha_1 + \ldots + a_{in}\alpha_n) &+ \\ + (a_{i1}\beta_1 + \ldots + a_{in}\beta_n) &= \\ &= b_i + 0 = b_i, \end{aligned}$$

lo que se debía demostrar.

b) *Si* $\overline{u}_0 = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ y $\overline{u} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, entonces

$$\begin{aligned} a_{i1}(\alpha - \gamma_1) + \ldots + a_{in}(\alpha_n - \gamma_n) &= \\ = (a_{i1}\alpha_1 + \ldots + a_{in}\alpha_n) &- \\ - (a_{i1}\gamma_1 - \ldots + a_{in}\gamma_n) &= \\ &= b_i - b_i = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la fila $\overline{v} = \overline{u} - \overline{u}_0$ es la solución del sistema homogéneo con la matriz A y vale decir también que la igualdad

$$\overline{u} = \overline{u}_0 + (\overline{u} - \overline{u}_0) = \overline{u}_0 + \overline{v}$$

ofrece la representación buscada.

Del teorema 5.5 se desprende que para la descripción del conjunto de todas las soluciones del sistema arbitrario de ecuaciones lineales con la matriz A se debe hallar cualquier solución de este sistema y añadir a ésta las combinaciones lineales arbitrarias del sistema homogéneo, descrito en el teorema 5.3, de soluciones con la misma matriz A. En calidad de ejemplo analicemos el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

Está claro que la fila (1, 1, 1, 1) es la solución de este sistema. Por esta razón, cualquier solución tiene el aspecto

$$(1, 1, 1, 1) + \alpha(1, 0, 0, -1) + \beta(0, 1, 0, -1)$$

o bien, lo que es lo mismo

$$(1+\alpha,\ 1+\beta,\ 1,\ 1-\alpha-\beta),$$

donde α y β son números reales arbitrarios.

EJERCICIOS

1. ¿Qué incógnitas en los sistemas de ecuaciones lineales de los ejercicios 1 y 2 en el párrafo 3 pueden ser anunciadas principales?

2. Demostrar que el sistema compatible de ecuaciones lineales de n incógnitas tiene solución única cuando y sólo cuando el rango de la matriz de este sistema es igual a n.

3. Si el sistema de n ecuaciones lineales con $n-1$ incógnitas es compatible, la matriz ampliada de este sistema es degenerada.

4. Hallar el sistema de soluciones, descrito en el teorema 5.3, para los sistemas de ecuaciones lineales de los ejercicios 1 h) . . . k) en el párrafo 3.

5. Hallar el sistema de soluciones, descrito en el teorema 5.3, para el sistema de ecuaciones lineales que resuelve el ejercicio 1 f) del párrafo 1.

6. Describir las soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales de los ejercicios 1 a) . . . e) en el párrafo 3 mediante el procedimiento indicado a fines del presente párrafo.

7. Lo mismo que en el ejercicio 7, para los sistemas de ecuaciones lineales, que dan la solución de los ejercicios 1 a), b) y e) en el párrafo 1.

8. Sean $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r$ las soluciones de cierto sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Demostrar que la fila $\lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_r\bar{u}_r$ es la solución de aquel mismo sistema cuando y sólo cuando $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1$.

9. Demostrar que la incógnita x_k en dicho sistema compatible de ecuaciones lineales se determina unívocamente cuando y sólo cuando el rango de la matriz disminuye, al tachar la columna k-ésima.

§ 6.
SISTEMAS FUNDAMENTALES DE SOLUCIONES

Como ya se había dicho antes, el teorema 5.3 muestra que todas las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales pueden ser obtenidas, componiendo las combinaciones lineales de cierto conjunto finito de soluciones. Es natural preguntar: ¿cómo saber, si se puede

de dicho sistema de soluciones obtener de tal modo todas las soluciones? Recibir la respuesta a esta pregunta es el fin del presente párrafo.

Como *rango del sistema* $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m\}$ de las filas de longitud n llamemos el rango $(m \times n)$ de la matriz compuesta de las filas de este sistema. Por ejemplo, el rango del sistema de las filas

$$\{(1, 1, 1, 1, 4), (1, 1, 2, 0, 4), (1, 1, 0, 2, 4), (1, 1, -1, 3, 4)\}$$

equivale al rango de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

es decir, como ya se había marcado en la pág. 41, a dos.

Establezcamos varios hechos auxiliares. Recordemos que la fila $\bar{v}$, según la definición, es la *combinación lineal* de las filas $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$, si $\bar{v} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_m\bar{u}_m$ para algunos números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. En este caso se dice también que la fila $\bar{v}$ *se expresa linealmente* a través de las filas $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m$. Por ejemplo, la fila $\bar{w} = (3, 1, 2, 2)$ linealmente se expresa por las filas $\bar{u} = (1, 2, 1, 2)$ y $\bar{v} = (-1, 3, 0, 2)$, puesto que $\bar{w} = 2\bar{u} + (-1)\bar{v}$.

Teorema 6.1. *Si la fila $\bar{w}$ se expresa linealmente a través de las filas $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_s$, y cada una de las filas $\bar{u}_i$ se expresa linealmente a través de las filas $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_t$,* entonces la fila $\bar{w}$ se expresa linealmente a través de las filas $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_t$.

Demostración. Según el planteamiento tenemos

$$\bar{w} = \lambda_1\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_s\bar{u}_s$$

y

$$\bar{u} = \mu_{i1}\bar{v}_1 + \ldots + \mu_{it}\bar{v}_t$$

para los convenientes números reales $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_{i1}, \ldots, \mu_{it}$. De aquí, tomando en consideración los teore-

mas 2.1 y 2.2 obtenemos

$$\begin{aligned}\bar{w} = &\lambda_1(\mu_{11}\bar{v}_1 + \mu_{12}\bar{v}_2 + \ldots + \mu_{1t}\bar{v}_t) + \\ &+ \lambda_2(\mu_{21}\bar{v}_1 + \mu_{22}\bar{v}_2 + \ldots + \mu_{2t}\bar{v}_t) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \lambda_s(\mu_{s1}\bar{v}_1 + \mu_{s2}\bar{v}_2 + \ldots + \mu_{st}\bar{v}_t) = \\ &= (\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21} + \ldots + \lambda_s\mu_{s1})\bar{v}_1 + \\ &+ (\lambda_1\mu_{12} + \lambda_2\mu_{22} + \ldots \lambda_s\mu_{s2})\bar{v}_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\lambda_1\mu_{1t} + \lambda_2\mu_{2t} + \ldots + \lambda_s\mu_{st})\bar{v}_t,\end{aligned}$$

lo que se quería demostrar.

Teorema 6.2. *Sea*

$$W = \begin{Vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{s1} & \ldots & u_{sn} \\ v_{11} & \ldots & v_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{t1} & \ldots & v_{tn} \end{Vmatrix}.$$

Entonces (el rango U) $\leqslant$ (el rango W). *Si por lo contrario las matrices* V *se expresan linealmente por las filas de la matriz* U, *entonces* (el rango W) = (el rango U).

Demostración. Para la demostración de la primera afirmación es suficiente señalar que cualquier submatriz no degenerada de la matriz U es la submatriz no degenerada de la matriz W. Por consiguiente, el mayor orden de tales submatrices en la matriz U no puede ser mayor que en la matriz W. En vigor de la definición del rango de la matriz esto significa, precisamente, que (el rango U) $\leqslant$ $\leqslant$ (el rango W). Al pasar a la demostración de la segunda afirmación supongamos que $\bar{u}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{in})$ y $\bar{v}_j = (v_{j1}, \ldots, v_{jn})$. Según el planteamiento

$$\bar{v}_j = \lambda_{j1}\bar{u}_1 + \ldots + \lambda_{js}\bar{u}_s$$

para los números reales convenientes $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{js}$. Al sustraer de la $(s+1)$-ésima fila de la matriz W sus primeras

s filas multiplicadas por $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1s}$, respectivamente, la convertimos en la nula. De modo análogo tratando las siguientes filas de la matriz W, llegamos a la matriz

$$T = \left\| \begin{matrix} u_{11} & \ldots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{s1} & \ldots & u_{sn} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 \end{matrix} \right\| .$$

Según el teorema 4.6 (el rango T) = (el rango W). Al reducir la matriz al aspecto escalonado S, lo que es posible en vigor del teorema 2.6, advertimos que las mismas transformaciones elementales convierten la matriz T en la matriz escalonada $\left\| \begin{matrix} S \\ O \end{matrix} \right\|$, donde O es la matriz nula $(t \times n)$. De acuerdo con los teoremas 4.5 y 4.6 (el rango W) = (el rango T = el rango $\left\| \begin{matrix} S \\ O \end{matrix} \right\|$ = (el rango S) = (el rango U).

Teorema 6.3. *Si de la matriz U a la matriz V se puede pasar mediante un número finito de transformaciones elementales de las filas, entonces cada una de las filas de la matriz V se expresa linealmente a través de las filas de la matriz U.*

Demostración. En caso de aplicación de una de las transformaciones elementales la validez del teorema se desprende de la definición. En caso general tenemos una sucesión de las matrices $U, W_1, W_2, \ldots, W_k, V$, donde de la matriz izquierda a la derecha se puede pasar haciendo uso de una sola transformación elemental. Por consiguiente, como ya se había indicado, cada una de las filas de la matriz derecha se expresa por las filas de la matriz izquierda. Queda solamente emplear varias veces el teorema 6.1.

Teorema 6.4. *Si cada fila del sistema Ω se expresa linealmente por las filas del sistema Ξ, entonces* (el rango Ω) $\leqslant$ $\leqslant$ (del rango Ξ),

Demostración. Si U y V son las matrices compuestas de las filas de los sistemas Ξ y Ω, respectivamente, enton-

ces, utilizando el teorema 6.2, obtenemos

(el rango Ω) – (el rango V) $\leqslant \left(\text{el rango} \begin{Vmatrix} U \\ V \end{Vmatrix}\right)$ = (el rango U) – (el rango Ξ).

Teorema 6.5. *Sea Ξ el sistema de las filas de longitud n, (el rango Ξ) $= r$ y Ω, el subsistema del sistema Ξ que contiene r filas y tiene rango r. Entonces cada una de las filas del sistema Ξ se expresa linealmente a través de las filas del sistema Ω.*

Demostración. Sean U y V las matrices compuestas de las filas de los sistemas Ξ y Ω, respectivamente, con la particularidad de que la matriz V coincide con las primeras r filas de la matriz U. Haciendo uso del teorema 2.6 reduzcamos la matriz V al aspecto escalonado S. Al aplicar las mismas transformaciones elementales para la matriz U, obtenemos la matriz $W' = \begin{Vmatrix} S \\ T' \end{Vmatrix}$, donde T' es la matriz $((m-r) \times n)$ compuesta de las filas de la matriz U que no entraron en la matriz V. En vigor de los teoremas 4.5 y 4.6 todas las filas de la matriz escalonada S difieren de la nula. Supongamos que los líderes de sus filas se disponen en las columnas con los números $j_1, \ldots, j_r$, es decir,

$$W' = \begin{Vmatrix} \ldots & s_{1j_1} & \ldots & s_{1j_2} & \ldots & s_{1j_r} & \ldots \\ \ldots & 0 & \ldots & s_{2j_2} & \ldots & s_{2j_r} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & s_{rj_r} & \ldots \\ \ldots & t'_{1j_1} & \ldots & t'_{2j_2} & \ldots & t'_{rj_r} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & t'_{n-r\,j_1} & \ldots & t'_{n-r\,j_2} & \ldots & t'_{n-r\,j_r} & \ldots \end{Vmatrix},$$

con la particularidad de que $s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{rj_r} \neq 0$. Al hacer uso varias veces del teorema 2.3 se puede de la matriz W' pasar con ayuda de las transformaciones elementales a la matriz $W = \begin{Vmatrix} S \\ T \end{Vmatrix}$, donde todos los elementos de la matriz T, que se encuentran en las columnas con los números $j_1, \ldots, j_r$, son iguales a cero. Cerciorémonos de que todas las filas de la matriz T son nulas. En efecto,

supongamos que $t_{pq} \neq 0$ para algunas p y q. Está claro que $q \neq j_1, \ldots, j_r$. Examinemos la submatriz M de la matriz W, que se encuentra en las filas con los números $1, 2, \ldots, r, p$ y en las columnas con los números $j_1, \ldots, j_r, q$. Son posibles los siguientes tres casos: $1/q < j_1$; $2/j_h < q < j_{h+1}$ para cierto h; $3/j_r < q$. Conmutando, si es necesario, las filas de la matriz M, llegamos a la matriz M' que equivale a

$$\begin{Vmatrix} t_{pq} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ s_{1q} & s_{1j_1} & s_{1j_2} & \ldots & s_{1j_r} \\ s_{2q} & 0 & s_{2j_2} & \ldots & s_{2j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{rq} & 0 & 0 & \ldots & s_{rj_r} \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} s_{1j_1} & \ldots & s_{1j_h} & s_{1q} & s_{1j_{h+1}} & \ldots & s_{1j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & s_{hj_h} & s_{hq} & s_{hj_{h+1}} & \ldots & s_{hj_r} \\ 0 & \ldots & 0 & t_{pq} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & s_{h+1q} & s_{h+1j_{h+1}} & \ldots & s_{h+1j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & s_{rq} & 0 & \ldots & s_{rj_r} \end{Vmatrix}$$

o bien

$$\begin{Vmatrix} s_{1j_1} & s_{1j_2} & \ldots & s_{1j_r} & s_{1q} \\ 0 & s_{2j_2} & \ldots & s_{2j_r} & s_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & s_{rj_r} & s_{rq} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & t_{pq} \end{Vmatrix},$$

respectivamente. Puesto que $s_{1j_1}, s_{2j_2}, \ldots, s_{rj_r}, t_{pq} \neq 0$, entonces en el tercer caso la matriz M' resulta escalonada de inmediato. Si, por lo contrario, en los primeros dos casos ella puede convertirse en la escalonada con ayuda de las transformaciones elementales de segundo tipo, anulando los elementos $s_{1q}, s_{2q}, \ldots, s_{rq}$ y $s_{h+1q}, \ldots, s_{rq}$, respectivamente (véase el teorema 2.3). De acuerdo con

los teoremas 4.5, 4.6 y 6.2 obtenemos

$$\begin{aligned} r+1 = (\text{el rango } M') = (\text{el rango } M) \leqslant (\text{el rango } W) = \\ = (\text{el rango } W') = (\text{el rango } U) = \\ = r. \end{aligned}$$

La contradicción surgida muestra que $W = \begin{Vmatrix} S \\ O \end{Vmatrix}$, donde O es la matriz nula ($(m-r) \times n$). En vigor de los teoremas 2.4 y 6.3 las filas de la matriz S se expresan linealmente a través de las filas de la matriz V, mientras que las filas de la matriz U, por las filas de la matriz W, o sea, lo que es lo mismo, por las filas de la matriz S. De aquí, haciendo uso del teorema 6.1, concluimos que las filas de la matriz U, que no entran en la matriz V, se expresan linealmente a través de las filas de la matriz V. Nos queda indicar que cada una de las filas del sistema Ω puede ser expresada a través del sistema Ω, tomando en calidad de coeficiente para esta fila la 1 y para las demás, 0.

Corolario. *Si A es la matriz de dimensión $(m \times n)$ y (el rango A) $= r$, entonces A contiene r filas, a través de las cuales se expresan linealmente todas las filas de la matriz A.*

Verdaderamente, la matriz A contiene la submatriz no degenerada de orden r. Está claro, que la matriz B, compuesta de las filas en las cuales se dispone esta submatriz, tiene rango r. Según el teorema 6.5 las filas de la matriz A se expresan linealmente a través de las filas de la matriz B.

La familia F de soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales se llama *sistema fundamental de soluciones*, si cualquier solución de este sistema es la combinación lineal de soluciones del sistema F, pero al eliminar del sistema F por lo menos una fila, la familia restante ya no posee esta propiedad. De acuerdo con el teorema 5.4 la familia de soluciones examinada en el teorema 5.3 es el sistema fundamental de soluciones. Existen también otros sistemas fundamentales de soluciones.

Como ejemplo analicemos el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{aligned}$$

Según el teorema 5.2 pueden ser anunciadas libres las incógnitas x_1 y x_4. Por esta razón del teorema 5.3 se desprende que las soluciones $(1, -1, 0, 0)$ y $(0, -1, 0, 1)$ forman el sistema fundamental de soluciones. El sistema fundamental de soluciones es también la familia $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1)\}$. Ésta surge, si se anuncian libres las incógnitas x_1 y x_2. A partir del primer sistema fundamental obtenemos que el conjunto de todas las soluciones del sistema (5.2) consta de las filas tipo

$$(\alpha, -(\alpha + \beta), 0, \beta),$$

donde α y β son números reales arbitrarios. El segundo sistema fundamental nos ofrece el conjunto de filas tipo

$$(\alpha, \beta, 0, -(\alpha + \beta)).$$

Es fácil de comprender que, como era de esperar, obtenemos el mismo conjunto.

Teorema 6.6. *Cada sistema fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneas lineales de n incógnitas con la matriz del sistema, que tiene rango r, contiene $n - r$ soluciones y su rango es igual a $n - r$.*

Demostración. De acuerdo con el teorema 5.2 algunas $n - r$ incógnitas de nuestro sistema de ecuaciones lineales pueden ser anunciadas libres y, por consiguiente, existe el sistema de soluciones $\Xi = \{\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{n-r}\}$ descrito en el teorema 5.3. Sea U la matriz $((n - r) \times n)$ compuesta de estas soluciones. Las columnas de la matriz U con los números $i_1, \ldots, i_{n-r}$ forman la submatriz E que es la matriz unidad de orden $n - r$. En vigor de los teoremas 4.5 y 6.2

$$n - r = (\text{el rango } E) \leqslant (\text{el rango } U) \leqslant n - r,$$

de donde

$$(\text{el rango } \Xi) = (\text{el rango } U) = n - r.$$

Ahora sea F el sistema fundamental arbitrario de soluciones del sistema de ecuaciones lineales a examinar y s el número de soluciones, que entran en F. Según el teorema 5.4 $s \geqslant n - r$. Si $s > n - r$, entonces en vigor de los teoremas 6.1 y 6.5 todas las soluciones de nuestro sistema se expresan linealmente por una parte de las soluciones del sistema F, lo que contradice a su carácter

fundamental. Para acabar, al aplicar dos veces el teorema 6.4. obtenemos

$$(\text{el rango } \Xi) \leqslant (\text{el rango } F) \leqslant (\text{el rango } \Xi),$$

de donde en vigor de lo demostrado anteriormente

$$(\text{el rango } F) = (\text{el rango } \Xi) = n - r.$$

El problema planteado en el comienzo del párrafo se resuelve con la siguiente afirmación.

Teorema 6.7. *Si F es el sistema de soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales de n incógnitas con la matriz del rango r, que contiene $n - r$ soluciones, y el rango del sistema F es igual a $n - r$, entonces F es el sistema fundamental de soluciones.*

Demostración. Supongamos que existe la solución $\vec{v}$ que no es la combinación lineal de soluciones de F. Examinemos el sistema de soluciones $\overline{F}$ obtenido mediante la agregación a F de la solución $\vec{v}$. Dado que de los teoremas 5.3 y 6.6 se deduce que el sistema de ecuaciones lineales a examinar posee el sistema fundamental de soluciones del rango $n - r$, entonces, de acuerdo con los teoremas 6.2 y 6.4 (el rango $\overline{F}$) $= n - r$. Pero, en este caso del teorema 6.5 y de la elección de la solución $\vec{v}$ sigue la existencia de tal solución $\vec{u} \in F$, que

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \ldots + \lambda_s \vec{u}_s + \mu \vec{v},$$

donde $\vec{u} \neq \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_s \in F$. Si $\mu = 0$, entonces, en vigor del teorema 6.4 (el rango F) $< n - r$ a pesar de la condición. Si, por lo contrario, $\mu \neq 0$, entonces, tomando en consideración los teoremas 2.1 y 2.2, obtenemos

$$\vec{v} = \mu^{-1}\vec{u} - \mu^{-1}\lambda_1\vec{u}_1 - \ldots - \mu^{-1}\lambda_s\vec{u}_s,$$

lo que contradice a la elección de la solución $\vec{v}$. Por lo tanto, cualquier solución del sistema de ecuaciones lineales a examinar se expresa linealmente a través de F. Si lo mismo puede ser conseguido empleando la parte del sistema F, entonces, teniendo en cuenta los teoremas 6.1 y 6.4, llegamos a la correlación imposible

$$n - r = (\text{el rando } F) < n - r,$$

lo que demuestra el carácter fundamental del sistema F.

Como ejemplo de aplicación del teorema 6.7 analicemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0. \end{aligned}$$

El rango de la matriz de este sistema es igual a dos (véase la pág. 41). Las soluciones (1, 1, 1, 1, —1), (0, 2, 1, 1, —1), (0, 0, 2, 2, —1) forman el sistema fundamental de soluciones, puesto que

$$\text{el rango} \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \end{matrix} \right\| = 3.$$

Si están dados dos sistemas de ecuaciones lineales, es natural preguntar: ¿en qué caso los conjuntos de soluciones de estos sistemas coinciden, es decir, cuándo estos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes? Con mayor exactitud se exige aclarar, cómo deben ser ligadas las matrices de estos sistemas, para que esta equivalencia tenga lugar. Tratemos de resolver este problema.

Teorema 6.8. *Si las filas de la matriz Φ son las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz A, entonces las filas de la matriz A sirven como soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz Φ.*

Demostración. Si $\overline{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ es la fila de la matriz Φ, entonces para cualquier fila $\overline{a}_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ de la matriz A tenemos

$$\alpha_{i1}a_{j1} + \ldots + \alpha_{in}a_{jn} = 0,$$

ya que $\overline{\alpha}_i$ es la solución de la ecuación

$$a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = 0.$$

Por consiguiente, la fila $\overline{a}_j$ sirve como solución de cualquier ecuación del sistema homogéneo con la matriz Φ, con lo que se concluye la demostración.

Teorema 6.9. *Si cualquier solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz A sirve como*

solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneas con la matriz B, entonces cada fila de la matriz B se expresa linealmente por las filas de la matriz A.

Demostración. Supongamos que F es el sistema fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones lineales con la matriz A y Φ es la matriz compuesta de estas soluciones. Si (el rango A) $= r$ y (el rango Φ) $= s$, entonces según el teorema 6.6 $r + s = n$, donde n es el número de columnas de la matriz A. Ésta contiene la submatriz no degenerada D de orden r. Sea U la matriz compuesta de las filas de la matriz A, en las cuales se dispone la submatriz D. Es obvio, que (el rango U) $= r$, y, en vigor del teorema 6.7, las filas de la matriz U forman el sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz Φ. Dado que las filas de la matriz Φ sirven como soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz B, entonces, de acuerdo con el teorema 6.8, las filas de la matriz B son las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz Φ. De la definición del sistema fundamental se infiere que las filas de la matriz B se expresan linealmente a través de las filas de la matriz U. Más aún que éstas se expresan por las filas de la matriz A: es suficiente con las filas, que no entran en la matriz U, tomar los coeficientes nulos.

El problema planteado para los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales lo resuelve el siguiente resultado:

Teorema 6.10. *Los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales con las matrices A y B son equivalentes cuando y sólo cuando cada una de las filas de la matriz A se expresa linealmente a través de las filas de la matriz B, mientras que cada una de las filas de la matriz B se expresa linealmente por las filas de la matriz A.*

Demostración. Si los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos con las matrices A y B son equivalentes, la expresividad recíproca de las filas de las matrices A y B se desprende del teorema 6.9. La afirmación inversa es el corolario del siguiente lema:

Lema. *Si las filas de la matriz ampliada $\tilde{B}$ de cierto sistema de ecuaciones lineales (¡no obligatoriamente homogéneo!) se expresan linealmente a través de las filas de la*

matriz ampliada $\tilde{A}$ de otro sistema, entonces cualquier solución del segundo sistema de ecuaciones lineales sirve como solución del primer sistema.

Para la demostración supongamos que la fila $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es la solución del sistema de ecuaciones con la matriz ampliada $\tilde{A}$. Entonces

$$a_{i1}\alpha_1 + \ldots + a_{in}\alpha_n = c_i,$$

donde $(a_{i1}, \ldots, a_{in}, c_i)$ es la i-ésima fila de la matriz A. Si

$$b_{k1}x_1 + \ldots + b_{kn}x_n = d_k$$

es cierta ecuación del primer sistema, entonces, según la condición, con los coeficientes convenientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, donde m es el número de filas de la matriz $\tilde{A}$, tenemos

$$(b_{k1}, \ldots, b_{kn}, d_k) = \\ = \lambda_1 (a_{11}, \ldots, a_{1n}, c_1) + \ldots + \\ + \lambda_m (a_{m1}, \ldots, a_{mn}, c_m).$$

De aquí

$$\begin{aligned} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_m a_{m1} &= b_{k1} \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_m a_{m2} &= b_{k2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_m a_{mn} &= b_{kn} \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_m c_m &= d_k \end{aligned}$$

y, por corsiguiente,

$$\begin{aligned} b_{k1}\alpha_1 + b_{k2}\alpha_2 + \ldots + b_{kn}\alpha_n &= \\ &= (\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_m a_{m1})\,\alpha_1 + \\ &+ (\lambda_1 \alpha_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_m a_{m2})\,\alpha_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_m a_{mn})\,\alpha_n = \\ &= \lambda_1 (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n) + \\ &+ \lambda_2 (a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n) + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \lambda_m (a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_n) = \\ &= \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \ldots + \lambda_m c_m = d_k. \end{aligned}$$

Así, pues, la fila $\overline{\alpha}$ sirve de solución del sistema de ecuaciones lineales con la matriz ampliada $\widetilde{B}$.

Teorema 6.11. *Si cada solución del sistema de ecuaciones lineales con la matriz ampliada* $\widetilde{A}$ *sirve de solución del sistema de ecuaciones lineales con la matriz ampliada* $\widetilde{B}$, *entonces cada fila de la matriz* $\widetilde{B}$ *se expresa linealmente a través de las filas de la matriz* $\widetilde{A}$.

Demostración. Establezcamos previamente el siguiente hecho:

Lema. *Si el sistema homogéneo de ecuaciones lineales posee la solución* $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *donde* $\alpha_n \neq 0$, *entonces se hallará tal sistema fundamental de soluciones de este sistema de ecuaciones lineales que la última coordenada de cada una de estas soluciones será igual a* -1.

Para la demostración tomemos el sistema fundamental arbitrario de soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales, que se examina, y compongamos de las soluciones que entran en éste la matriz Φ. Si la última columna de esta matriz resulta nula, entonces, puesto que cualquier solución es la combinación lineal de las filas de la matriz Φ, su última coordenada debe igualarse a cero. Esto, sin embargo, contradice la condición del lema. Al multiplicar las filas de la matriz Φ por los convenientes números diferentes de cero, se puede obtener la matriz Ψ, cuya última columna contendrá solamente 0 y -1. Con ello, según el teorema 3.5 las filas de la matriz Ψ son, como antes, las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales que se analiza. Del teorema 4.3 se deduce que (el rango Φ) = (el rango Ψ) y, en vigor del teorema 6.7, las filas de la matriz Ψ forman el sistema fundamental de soluciones de nuestro sistema homogéneo de ecuaciones lineales. Ahora registremos en la matriz Ψ cierta fila con la última coordenada, igual a -1, y la adicionemos a todas las filas de la matriz Ψ, la última coordenada de las cuales equivale a 0. En vigor del teorema 3.5 la matriz obtenida de tal modo consta de las soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales a examinar y, de acuerdo con el teorema 4.6, su rango es igual al rango de la matriz Ψ. Según el teorema 6.7 las filas de la matriz obtenida forman el sistema

fundamental de soluciones de nuestro sistema homogéneo de ecuaciones lineales, la última coordenada de cada una de las cuales equivale a -1.

Al retornar a la demostración del teorema, compongamos los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales con las matrices $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$. Si $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es la solución del sistema de ecuaciones lineales con la matriz ampliada $\tilde{A}$, entonces $(\alpha_1, \ldots, \alpha, -1)$ es la solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz $\tilde{A}$. En vigor del lema se hallará tal sistema fundamental F de soluciones de este sistema homogéneo de ecuaciones lineales, que la última coordenada de cada una de estas soluciones será igual a -1. Al eliminar las últimas coordenadas, obtenemos el sistema de soluciones del sistema de ecuaciones lineales con la matriz ampliada $\tilde{A}$. Según lo enunciado estas soluciones son las del sistema de ecuaciones lineales con la matriz ampliada $\tilde{B}$. Por consiguiente, cada solución del sistema $\tilde{F}$ es la solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz $\tilde{B}$. Del teorema 3.5 y de la definición del sistema fundamental de soluciones se desprende que cada solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz $\tilde{A}$ es la solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz $\tilde{B}$. En vigor del teorema 6.9 cada fila de la matriz $\tilde{B}$ se expresa linealmente a través de las filas de la matriz $\tilde{A}$, lo que se quería demostrar.

La solución completa del problema a examinar ofrece:

Teorema 6.12. *Para la equivalencia de los sistemas de ecuaciones lineales con las matrices ampliadas $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ es necesario y suficiente, que cada fila de la matriz $\tilde{A}$ se exprese linealmente a través de las filas de la matriz $\tilde{B}$, mientras que cada fila de la matriz $\tilde{B}$ se exprese linealmente por las filas de la matriz $\tilde{A}$.*

Demostración. La suficiencia de las condiciones enunciadas se infiere del lema establecido durante la

demostración del teorema 6.10, mientras que la necesidad, del teorema 6.11.

Para aplicar el teorema 6.12 a menudo es útil el siguiente resultado:

Teorema 6.13. *Supongamos que la matriz A está compuesta de las filas* $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r$, *(el rango A)* $= r$, *las filas de la matriz B permiten la representación*

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 &= \lambda_{11}\bar{a}_1 + \lambda_{12}\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_{1r}\bar{a}_r, \\ \bar{b}_2 &= \lambda_{21}\bar{a}_1 + \lambda_{22}\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_{2r}\bar{a}_r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{b}_m &= \lambda_{m1}\bar{a}_1 + \lambda_{m2}\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_{mr}\bar{a}_r \end{aligned}$$

y el rango de la matriz

$$\begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{m1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1r} & \lambda_{2r} & & \lambda_{mr} \end{Vmatrix}$$

es igual a r. En este caso las filas de la matriz A se expresan linealmente a través de las filas de la matriz B.

Demostración. En vista de que el rango de la matriz

$$\begin{Vmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \ldots & \lambda_{m1} & c_1 \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{m2} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1r} & \lambda_{2r} & \ldots & \lambda_{mr} & c_r \end{Vmatrix}$$

no puede superar a r, entonces del teorema 5.1 se desprende que con cualquier $c_1, c_2, \ldots, c_r$ el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \lambda_{11}x_1 + \lambda_{21}x_2 + \ldots + \lambda_{m1}x_m &= c_1, \\ \lambda_{12}x_1 + \lambda_{22}x_2 + \ldots + \lambda_{m2}x_m &= c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_{1r}x_1 + \lambda_{2r}x_2 + \ldots + \lambda_{mr}x_m &= c_r \end{aligned}$$

tiene solución. En particular, si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ es la solución para el caso cuando $c_i = 1$ y $c_j = 0$, si $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned} &\alpha_1\bar{b}_1 + \alpha_2\bar{b}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{b}_m \\ &= \alpha_1(\lambda_{11}\bar{a}_1 + \lambda_{12}\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_{1r}\bar{a}_r) + \end{aligned}$$

$$+\lambda_2(\lambda_{21}\bar{a}_1+\lambda_{22}\bar{a}_2+\ldots+\lambda_{2r}\bar{a}_r)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\alpha_m(\lambda_{m1}\bar{a}_1+\lambda_{m2}\bar{a}_2+\ldots+\lambda_{mr}\bar{a}_r)=$$
$$=(\lambda_{11}\alpha_1+\lambda_{21}\alpha_2+\ldots+\lambda_{m1}\alpha_m)\bar{a}_1+$$
$$+(\lambda_{12}\alpha_1+\lambda_{22}\alpha_2+\ldots+\lambda_{m2}\alpha_m)\bar{a}_2+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(\lambda_{1r}\alpha_1+\lambda_{2r}\alpha_2+\ldots+\lambda_{mr}\alpha_r)\bar{a}_m=$$
$$=0\bar{a}_1+\ldots+0\bar{a}_{i-1}+1\bar{a}_i+0a_{i+1}+\ldots+0\bar{a}_m=\bar{a}_i,$$

lo que se debía demostrar.

En calidad de ejemplo examinemos los sistemas

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=4,\\ x_1+x_2-x_3+x_4&=2 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3x_1+3x_2+x_3+3x_4&=10,\\ x_1+x_2+3x_3+x_4&=6. \end{aligned}$$

Las filas de la matriz ampliada del segundo sistema se expresan linealmente a través de las filas de la matriz del primer sistema, con la particularidad de que la matriz indicada en el teorema 6.13 tiene el aspecto

$$\begin{Vmatrix} 2 & 1\\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$$

Puesto que el rango de esta matriz es igual a 2, entonces las filas de la matriz ampliada del primer sistema también se expresan linealmente a través de las filas de la matriz ampliada del segundo sistema. Por consiguiente, estos sistemas con equivalentes.

EJERCICIOS

1. Hallar el sistema fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5&=0,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5&=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5&=0,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5&=0. \end{aligned}$$

2. ¿Serán fundamentales los siguientes sistemas de soluciones del sistema de ecuaciones lineales del ejercicio 1: a) {(3, —2, —1, —1, 1), (2, 0, —2, —1, 1)}; b) {(3, —2, —1, —1, 1), (1, —2, 1, 0, 0), (2, 0, —2, —1, 1)}; c) {(1, —2, 1, 0, 0), (0, 0, —1, 1, 0), (4, 0, 0, —6, 2)}; d) {(1, —2, 1, 0, 0), (1, —2, 0, 1, 0), (0, 0, 1, —1, 0), (1, —2, 3, —2, 0)}?

3. ¿Cuáles de las filas de la matriz

$$\begin{Vmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{Vmatrix}$$

forman el sistema fundamental de soluciones para el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0? \end{aligned}$$

4. Hallar el sistema fundamental de soluciones del sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} \lambda_1 b_1 x_1 + \ldots + \lambda_n b_1 x_n + a_1 x_{n+1} &= 0, \\ \lambda_1 b_2 x_1 + \ldots + \lambda_n b_2 x_n + a_2 x_{n+1} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 b_m x_1 + \ldots + \lambda_n b_m x_n + a_m x_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Indicación: demostrar previamenteque $\left(\text{el rango} \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}\right) =$ $= 2$ cuando y sólo cuando $ad - bc \neq 0$.

5. Para cualquier sistema homogéneo de ecuaciones lineales con coeficientes enteros existe el sistema fundamental de soluciones, como coordenadas de las filas del cual sirven los números enteros.

6. Hallar el sistema de ecuaciones lineales homogéneas, para el cual el sistema fundamental de soluciones forman las filas: a) (1, 2, —1, 0, 1) y (1, 3, 1, 1, 2); b) (2, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0) y (—1, 0, 0, 1); c) (1, 2, 3, —1).

7. Hallar el sistema de ecuaciones lineales de cuatro incógnitas, el rango de la matriz del cual es igual a dos, mientras que las filas (1, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 0) y (1, 2, 1, 0) sirven como sus soluciones.

8. ¿Son equivalentes los sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - x_4 &= 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 &= 1? \end{aligned}$$

9. Supongamos que $\{(1, 1, 3, 1), (0, 1, 2, 0)\}$ y $\{(2, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1)\}$ son los sistemas fundamentales de soluciones de los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales con las matrices A y B, respectivamente. Hallar el sistema fundamental de soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz $\left\| \begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \right\|$.

10. Componer el sistema de ecuaciones lineales homogéneas, el conjunto de todas las soluciones del cual coincide con el conjunto de cualesquier combinaciones lineales $\lambda\overline{u} + \mu\overline{v}$, donde $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son soluciones de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0, \\ x_2 + 2x_3 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 0, \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 &= 0, \end{aligned}$$

respectivamente.

11. Sea A^* una matriz, como cuyas filas sirven las columnas de la matriz A. Demostrar:

a) si A es la matriz degenerada, entonces la matriz A^* es también degenerada. **Indicación:** hacer uso del teorema 6.4 y del ejercicio 10 en el párrafo 4;

b) (el rango A) = (el rango A^*). **Indicación:** hacer uso del punto a).

12. Demostrar que el rango de la matriz no cambia durante las transformaciones elementales de las columnas de los tipos I y II. ¿Se utiliza el rango de la matriz con las transformaciones elementales del III tipo?

RESPUESTAS

§ 1

1. a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 40,$
$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 20;$

b) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20,$
$5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 20x_4 = 200;$

c) $x_1 + x_2 + x_3 = 1,$
$x_1 + x_2 + x_4 = 1,$
$x_1 + x_3 + x_4 = 1,$
$x_2 + x_3 + x_4 = 1;$

d) $x_1 + x_2 = 1,$
$x_1 + x_3 = 1,$
$x_1 + x_4 = 1,$
$x_2 + x_3 = 1,$
$x_2 + x_4 = 1,$
$x_3 + x_4 = 1$

e) $20x_1 + 12x_2 + 10x_4 = 120,$
$20x_1 + 15x_3 + 10x_4 = 120,$
$12x_2 + 15x_3 + 10x_4 = 120;$

f) $x_1 + x_2 = 0,$
$x_2 + x_3 = 0,$
$\dots\dots\dots$
$x_{n-1} + x_n = 0,$
$x_1 + x_n = 0.$

§ 2

1. Por ejemplo, $\overline{a} = (0, 1, 2, 0)$, $\overline{b} = (0, -1, -1, 2)$.

2. $(0, -3, 3, 2, 2)$. 5. $\overline{x} = (0, 1, 2, -2)$, $\overline{y} = (20/3, -25/3, 10/3, -5/3)$. 6. a) $(1, 4, -7, 7)$.

7. a) $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -20 \end{matrix} \right\|$; b) $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 5 & 10 & 15 & 100 \end{matrix} \right\|$;

c) $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{matrix} \right\|$; d) $\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$;

e) $\left\| \begin{matrix} 20 & 12 & 0 & 10 & 120 \\ 0 & -12 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 10 & 120 \end{matrix} \right\|$;

f) con n par $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$

con n impar $\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$

Nota. Las respuestas en los ejercicios 7 a) . . . f) pueden ser otras. Sin embargo, los líderes deben disponerse en las mismas columnas (véase el ejercicio 13). 9. Por ejemplo, $\begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

§ 3

1. a) $x_1 = \frac{1}{4}(8 - x_3 - 9x_4)$, $x_2 = \frac{1}{4}(5x_3 + x_4)$; b) $x_1 = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}$, $x_3 = x_4 = 0$; c) el sistema es incompatible; d) $x_1 = \frac{1}{4}(1 - 3x_2 - x_3)$, $x_4 = 1$; e) $x_1 = -\frac{1}{12}(7 - 18x_2 + x_4)$, $x_3 = \frac{1}{6}(1 - 5x_4)$; f) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; g) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$; h) $x_1 = x_4 - x_5$, $x_2 = x_4 - x_6$, $x_3 = x_4$; i) $x_1 = x_4 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}(x_3 - 2x_5)$; j) $x_1 = -3x_3 - 5x_5$, $x_2 = 2x_3 + 3x_5$, $x_4 = 0$; k) si $n = 3k$ o bien $n = 3k + 1$, entonces solamente la solución nula, si, por lo contrario, $n = 3k + 2$, entonces

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{si } i = 3m, \\ -x_n, & \text{si } i = 3m+1, \\ x_n, & \text{si } i = 3m+2. \end{cases}$$

Nota. Las respuestas para los ejercicios 1 a), b), d), e), h), i), j) y k), cuando $n = 3k + 2$ permiten también otra anotación.

2. a) Uno de los lados es igual a 10 cm, mientras que la suma de los lados restantes, 30 m. Por ejemplo, 8 m, 15 m, 7 m y 10 m. b) Si x_1 es el número de monedas de 5 kópeks de valor, x_2, de 10 kópeks de valor, x_3, de 15 kópeks de valor y x_4, de 20 kópeks de valor,

entonces $x_1 = x_3 + 2x_4$ y $x_2 = 20 - 2x_3 - 3x_4$. Una de las soluciones es (7, 8, 3, 2). Con el máximo número de monedas de 20 kópeks de valor tenemos (12, 2, 0, 6) o sea (13, 0, 1, 6) y con el número máximo de monedas de 15 kópeks, (10, 0, 10, 0). c) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/3$. d) $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1/2$. e) Si x_1, x_2, x_3 y x_4 son los números de horas de trabajo de las hormigoneras de rendimiento de cada una de 20, 12, 15 y 10 toneladas del hormigón por hora, respectivamente, entonces $x_1 = \frac{1}{4}(12 - x_4)$, $x_2 = \frac{1}{12}(60 - 5x_4)$, $x_3 = \frac{1}{3}(12 - x_4)$. Una de las soluciones es (5/2, 25/6, 10/3, 2). Con el máximo empleo de la cuarta hormigonera tenemos (1/4, 5/12, 1/3, 11) y con el mínimo, (11/4, 55/12, 11/3, 1). f) Si n es el número impar, todos los números son iguales a cero y, con n par, todos estos números son iguales por su valor absoluto, con la particularidad de que la mitad de estos números es mayor o igual a cero, y los demás números son menores e iguales a cere.

4. Uno de los sistemas: $-2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1,$
$-2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0.$

7. No: el número de soluciones es uno o infinito.

§ 4

1. a) 2; b) 2; c) 4; d) 4; e) 3; f) $n - 1$ con n par y n con n impar.
2. a) 2; b) 3; c) 6; d) 5; e) si $a_1 = \ldots = a_n$, entonces el rango es igual a cero para $a_1 = -b_1 = \ldots = -b_n$ y 1 en el caso contrario; sin embargo, si existe $a_i \neq a_1$, entonces el rango es igual a 1 para $b_1 = \ldots = b_n$, y 2 en el caso contrario.

§ 5

1. Para los ejercicios 1 en el párrafo 3: a) las dos, no importa cuales; b) x_1, x_3, x_4, o bien x_2, x_3, x_4; c) el sistema es incompatible; d) x_1 y x_4, o bien x_2 y x_4, o bien x_3 y x_4; e) x_1 y x_3, o bien x_1 y x_4, o bien x_2 y x_3, o bien x_2 y x_3, o bien x_3 y x_4; f) todos; g) todos; h) x_1, x_2, x_3, o bien x_1, x_2, x_3, o bien x_2, x_3, x_5, o bien x_2, x_4, x_5, o bien x_3, x_5, x_6, o bien x_4, x_5, x_6; i) x_1, x_2, x_4, o bien x_1, x_3, x_4, o bien x_1, x_4, x_5; j) cualesquiera tres, entre las cuales se encuentra x_4; k) si $n = 3k$ o bien $3k + 1$, entonces todas, si $n = 3k + 2$, entonces $x_3, x_6, \ldots, x_{3k}$ y cualquier $k + 1$ de las restantes. Para el ejercicio 2 en el párrafo 3: a) x_1 y x_4, o bien x_2 y x_4, o bien x_3 y x_4; b) las dos, no importa cuales; c) todas; d) todas; e) cualesquiera tres; f) si n es impar, entonces todas, si n es par, entonces cualquier $n - 1$;

4. Para los ejercicios 1 en el párrafo 3: h) (1, 1, 1, 1, 0, 0), (−1, 0, 0, 0, 1, 0), (0, −1, 0, 0, 0, 1); i) (0, 1, 3, 0, 0), (0, −2, 0, 0, 3); j) (−3, 2, 1, 0, 0), (−5, 3, 0, 0, 1); k) si $n = 3k$ o sea $3k + 1$, entonces hay solamente una solución nula, si $n = 3k + 2$, entonces (−1, 1, 0, −1, 1, 0, . . ., −1, 1, 0, −1, 1).

5. Si n es impar, entonces hay solamente una solución nula. Si n es par, entonces (1, −1, 1, −1, . . ., −1, 1, −1).

Nota. Las respuestas en los ejercicios 4 y 5 pueden ser también otras, pero el número de filas, que entran en el sistema de soluciones hallado, debe coincidir con el número de filas indicadas en las respuestas ofrecidas.

6. a) $(2, 0, 0, 0) + \lambda(-1, -5, 4, 0) + \mu(-9, -1, 0, 4)$; b) $(-1, -1, 0, 0) + \lambda(2, 3, 0, 0)$; c) el sistema es incompatible; d) $(1, -1, 0, 1) + \lambda(-3, 4, 0, 0) + \mu(-1, 0, 4, 0)$; e) $(1, 1, 1, -1) + \lambda(-1, 0, -10, 12) + \mu(3, 2, 0, 0)$.

7. a) $(10, 10, 10, 10) + \lambda(-1, 0, 1, 0) + \mu(0, -1, 1, 0)$; b) $(7, 8, 3, 2) + \lambda(1, -2, 1, 0) + \mu(2, -3, 0, 1)$; c) $(0, 0, 0, 12) + \lambda(3, 5, 4, -12)$.

Nota. Las respuestas en los ejercicios 6 y 7 pueden ser también otras, pero el número de filas, que entran en la respuesta, debe ser lo mismo.

§ 6

1. Por ejemplo, $\{(1, -2, 1, 0, 0), (1, -2, 0, 1, 0), (5, -6, 0, 0, 1)\}$.

2. a) no; b) no; c) sí; d) no

3. La cuarta fila juntamente con cualesquiera dos filas de las primeras tres

4. Si todos los coeficientes son iguales a cero, entonces $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, donde $\bar{e}_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$; si existen los coeficientes no nulos, pero $\lambda_i a_j b_k - \lambda_i a_k b_j = 0$ para todos los i, j, k, que $\{a_j\bar{e}_1 - \lambda_1 b_j \bar{e}_{n+1}, a_j\bar{e}_2 - \lambda_2 b_j \bar{e}_{n+1}, \ldots, a_j\bar{e}_n - \lambda_n b_j \bar{e}_{n+1}$ en caso, cuando $a_j \neq 0$, y $\{\lambda_i b_k \bar{e}_1 - \lambda_1 b_k \bar{e}_i, \ldots, \lambda_i b_k \bar{e}_{i-1} - \lambda_{i-1} b_k \bar{e}_i, \lambda_i b_k \bar{e}_{i+1} - \lambda_{i+1} b_k \bar{e}_i, \ldots, \lambda_i b_k \bar{e}_n - \lambda_n b_k \bar{e}_i, \bar{e}_{n+1}\}$ en el caso, cuando $a_1 = \ldots = a_m = 0$, pero $\lambda_i b_k \neq 0$; si $\Delta = \lambda_i a_j b_k - \lambda_i a_k b_j \neq 0$ para ciertos i, j, k, entonces $\{\Delta\bar{e}_1 + \lambda_1 \omega \bar{e}_i, \ldots, \Delta\bar{e}_{i-1} + \lambda_{i-1}\omega\bar{e}_i, \Delta\bar{e}_i, \Delta\bar{e}_{i+1} + \lambda_{i+1}\omega\bar{e}_i, \ldots, \Delta\bar{e}_n + \lambda_n\omega\bar{e}_i$, donde $\omega = a_k b_j - a_j b_k$.

6. a)
$$\begin{aligned} 8x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 &= 0, \\ x_3 - 3x_4 + x_5 &= 0; \end{aligned}$$

b) $x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$;

c)
$$\begin{aligned} -5x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0, \\ x_3 + 3x_4 &= 0. \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2. \end{aligned}$$

8. Sí.

9. $(1, 0, 1, 1)$.

10. $x_1 + x_3 + x_4 = 0$

Nota. Las respuestas en los ejercicios 4, 7, 9 y 10 pueden ser también otras, pero el rango de los sistemas hallados debe coincidir con el rango de los sistemas aducidos.

SOLUCIONES

§ 2

7. f) Añadimos a la última fila de la matriz dada todas las filas pares anteriores y todas las filas impares anteriores multiplicadas por -1. En este caso para el número n par e impar obtenemos las matrices escalonadas

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$$

11. Para $a \neq 0$ el problema se resuelve mediante la obtención sucesiva de la siguiente cadena de matrices:

$$\begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a & 0 \\ a & b \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a & 0 \\ a+1 & b \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{Vmatrix},$$

$$\begin{Vmatrix} a & -ab \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & -ab \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -ab \end{Vmatrix}.$$

12. Se debe señalar que cumpliendo una transformación elemental cada fila de la matriz nueva es la combinación lineal de filas de la matriz dada, después de lo cual hacer uso del número requerido de veces del ejercicio 6 b).

13. Sean $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_r$ y $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_s$ las filas no nulas de las matrices B y C, respectivamente. Supongamos que los líderes de estas filas se disponen en las columnas con los números $k_1, \dots, k_r$ y $l_1, \dots, l_s$, donde $k_1 < \dots < k_r$ y $l_1 < \dots < l_s$. Del teorema 2.4 se desprende que tanto de B a C, como de C a B se puede pasar con ayuda de las transformaciones elementales. De acuerdo con el ejercicio 12 cada una de las filas $\bar{b}_i$ es la combinación lineal de las filas $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_s$, mientras que cada una de las filas $\bar{c}_j$, la combinación lineal de las filas $b_1, \dots, b_r$. De aquí se ve que $k_1 = l_1$. Si, luego, $\bar{b}_2 = \xi_1\bar{c}_1 + \dots + \xi_s\bar{c}_s$ y $\bar{c}_2 = \eta_1\bar{b}_1 + \dots + \eta_r\bar{b}_r$, entonces $\xi_1 = 0 = \eta_1$, y, como antes, cercioramos que $k_2 = l_2$. De modo análogo, examinando las expresiones para $\bar{b}_3$ y $\bar{c}_3$ cerciorémonos que $k_3 = l_3$. Si $r \leqslant s$, entonces, continuando este proceso lleguemos a $k_i = l_i$, donde $1 \leqslant i \leqslant r$. Para $r < s$ de la igualdad $\bar{c}_{r+1} = \zeta_1\bar{b}_1 + \dots + \zeta_r\bar{b}_r$ deducimos que $\zeta_1 = \dots = \zeta_r = 0$. De aquí $\bar{0} \neq \bar{c}_{r+1} = \bar{0}$, lo que es imposible. El caso cuando $s \leqslant r$ se examina de manera análoga.

§ 3

1. k) La matriz del sistema tiene el aspecto

$$\left\| \begin{array}{ccc|cccccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Sustraemos de la segunda fila la primera, desplacemos la segunda fila al tercer lugar y la sustraemos de la cuarta fila. En este caso se obtiene la matriz

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|.$$

Ahora sustraemos de la quinta fila la cuarta, desplacemos la quinta fila al sexto lugar y la sustraemos de la séptima fila. De resultas surge la matriz

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right\|.$$

Luego, de la octava fila sustraemos la séptima, desplacemos la octava fila al noveno lugar y la sustraemos de la décima fila. Continuando este proceso, cuando $n = 3k$, $3k + 2$ o sea $3k + 1$, respectivamente lleguemos a las matrices

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} & B & & & O & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc|cc} & B & & O & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{array} \right\|$$

o bien

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} & B & & O \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

donde O es la matriz nula y

$$B = \left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{12}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

En los primeros dos casos después de las transformaciones elementales evidentes obtenemos

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc} & B & & & O & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \quad \text{y} \quad \left\| \begin{array}{ccc|cc} & B & & O & \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

respectivamente. Ahora está claro, que en los primer y tercer casos el sistema posee solamente la solución nula. En el segundo caso obtenemos $x_{3i} = 0$ y $x_{3i+2} = -x_{3i+1} = x_n$ (señalemos que $n = 3k + 2$).

5. Si la fila $\bar{b}$, de la cual se trata, se representa en forma de $\bar{b} = \lambda_1\bar{b}_1 + \dots + \lambda_n\bar{b}_n$, donde $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n$ son las demás filas, entonces, al añadir a $\bar{b}$ la combinación lineal $-\lambda_1\bar{b}_1 - \dots - \lambda_n\bar{b}_n$, convirtamos esta fila a la nula. Nos queda hacer uso de los teoremas 1.1 y 3.2.

6. La matriz ampliada debe ser nula. La suficiencia de esta condición es evidente. Para demostrar la necesidad se debe hacer uso de que las filas $\bar{0}$ y $\bar{e}_i = (\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, 0, \dots, 0)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ son soluciones.

§ 4

2. e) De la matriz dada con ayuda de las transformaciones elementales es fácil de pasar a la matriz

$$\left\|\begin{matrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \ldots & a_2+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \ldots & a_2-a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \ldots & a_n-a_1 \end{matrix}\right\|.$$

Si $a_1 = \ldots = a_n$, entonces todas las filas, menos la primera, son nulas, y el rango es igual a 0 o sea a 1 en función de que si la primera fila es nula o no. Si $a_i \neq a_1$ para cierto i, entonces la i-ésima fila es diferente de la nula. Mediante las transformaciones elementales evidentes la matriz que se analiza se convierte a

$$\left\|\begin{matrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \ldots & a_1+b_n \\ a_i-a_1 & a_i-a_1 & \ldots & a_i-a_1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Al añadir a la primera fila la segunda multiplicada por $-\frac{a_1+b_1}{a_i+b_1}$, con $b_1 = \ldots = b_n$ obtenemos la matriz con la única fila no nula y en el caso contrario, cambiando de lugares las primeras dos filas, llegamos a la matriz escalonada con dos filas no nulas.

5. Si a cada una de las filas de la matriz A añadir la fila correspondiente de la matriz B, entonces se obtendrá la matriz C que coincide con la matriz, que se encuentra en el primer miembro de la desigualdad a demostrar. Por esta razón, tomando en consideración el teorema 4.6 y el ejercicio 3, obtenemos

$$(\text{el rango } C) \leqslant \left(\text{el rango } \left\|\begin{matrix} C \\ B \end{matrix}\right\|\right) = \left(\text{el rango } \left\|\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\|\right) \leqslant (\text{el rango } A) + (\text{el rango } B)$$

10. Es suficiente advertir que si la i-ésima columna es la combinación lineal de las demás con los coeficientes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n$, entonces la fila $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, -1, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n)$ sirve como solución no nula del sistema homogéneo de ecuaciones lineales con la matriz A, y tomar en atención el teorema 4.1.

§ 5

3. Si la matriz ampliada del sistema de ecuaciones lineales resulta no degenerada, el rango de esta matriz es igual a n, mientras que el rango de la matriz del sistema no supera a $n-1$, lo que,

en vigor del teorema 5.1 lleva a la incompatibilidad del sistema de ecuaciones lineales a examinar.

9. Si el rango de la matriz del sistema es equivalente y disminuye al tachar la k-ésima columna, entonces hay que señalar que la k-ésima columna debe pasar por cualesquiera submatriz de orden r. Por esta razón, al reducir al aspecto escalonado la matriz ampliada de dicho sistema de ecuaciones lineales con la k-ésima columna eliminada y aplicando las mismas transformaciones elementales para toda la matriz, obtenemos que la r-ésima fila tiene elementos no nulos solamente en la k-ésima columna y en la de términos independientes. Después de esto está claro que x_k se determina unívocamente. Al contrario, si x_k se determina unívocamente, entonces esta incógnita no puede ser anunciada libre y, según el teorema de las incógnitas principales, la k-ésima columna pasa a través de cualquier submatriz no degenerada, cuyo orden es igual al rango del sistema.

§ 6

4. Si $ab - cd \neq 0$, entonces para $a \neq 0$ de $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$ es suficiente pasar a $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{Vmatrix}$, al añadir a la segunda fila la primera multiplicada por $-\frac{c}{a}$, y señalar que $d - \frac{bc}{a} \neq 0$. Si por lo contrario $a = 0$, entonces $c \neq 0$ y se puede actuar de modo análogo. Al contrario, si el rango $\begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = 2$, entonces $a \neq 0$ o sea $c \neq 0$. Cuando $a \neq 0$, haciendo el mismo paso, como antes, obtenemos $d - \frac{bc}{a} \neq 0$, de donde $ad - bc \neq 0$. Para $c \neq 0$ hay que actuar análogamente.

5. Prestar atención a que para la solución del sistema de ecuaciones lineales con los coeficientes enteros se puede hallar el sistema fundamental de soluciones con coordenadas racionales y, a continuación, multiplicar las filas obtenidas por el producto de denominadores.

7. Componer el sistema homogéneo de ecuaciones lineales con el sistema fundamental de soluciones $\{(1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, -1)\}$ y, al sustituir en éste la fila $(1, 1, 1, 1)$, obtener los términos independientes necesarios.

9. **Primer procedimiento.** Indicar que el conjunto buscado de soluciones consta de las filas que satisfacen la correlación

$$\lambda (1, 1, 3, 1) + \mu (0, 1, 2, 0) = \xi (2, 1, 0, 1) + \eta (1, 0, 1, 1).$$

Al igualar las coordenadas obtenemos el sistema de ecuaciones lineales con las incógnitas λ, μ, ξ, η. Al resolverlo hallamos el conjunto buscado.

Segundo procedimiento. Componer los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales que tienen sistemas fundamentales dados

de soluciones y, luego, resolver el sistema que consta de todas las ecuaciones obtenidas.

10. Componer la matriz de los sistemas fundamentales de ambos estos sistemas, determinar su rango (éste resulta igual a 3) y hallar el sistema homogéneo de ecuaciones lineales, para las cuales las filas, que pasan por la submatriz no degenerada de orden 3, sirven como sistema fundamental de soluciones.

12. Puesto que a las transformaciones elementales de las columnas de la matriz A corresponden las transformaciones elementales de las filas de la matriz A^*, entonces es suficiente tomar en consideración el ejercicio 9 a) y el teorema 4.6.

ÍNDICE ALFABÉTICO DE MATERIAS

Anuncio de las incógnitas como libres 44
— — — — — principales 44

Coeficiente 7
Combinación lineal de las filas 23, 54
Componente de la fila 12
Coordenada de la fila 12

Dimensión de la matriz 15

Expresividad lineal de la fila 54

Fila 7
— nula 12
Filas iguales 12

Líder de la fila 12

Matrices iguales 15
Matriz 15
— cuadrada 15
— degenerada 34
— del sistema de ecuaciones lineales 15
Matriz diagonal 24
— escalonada 18
— nula 15
— unitaria 15
Multiplicación de la fila por un número 14

Orden de la matriz 15

Rango de la matriz 38
— del sistema de las filas 54

Sistema de ecuaciones lineales 9
— fundamental de soluciones 59
— homogéneo de ecuaciones lineales 30
Sistemas equivalentes de ecuaciones lineales 10
Solución de la ecuación 7
— del sistema de ecuaciones 9
Submatriz 38
Suma de filas 12

Término independiente 7
Transformaciones elementales de las filas 16
— — — — columnas 16

Vector 7

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

A. Belski, L. Kaluzhnin
División inexacta (2-a edición)

N. Beskin
Fracciones maravillosas

N. Beskin
Representación de figuras espaciales

I. Guelfand, E. Glagólieva, A. Kirilov
Método de coordenadas (4-a edición)

A. Bársov
Qué es la programación lineal

P. Korovkin
Desigualdades (2-edición)

A. Smogorzhevski
La regla en construcciones geométricas (2-a edición)

ISBN 5—03—000478—5

Editorial MIR



Moscú